UNIVERSITÀ DI PISA

ANALISI MATEMATICA 1

PIETRO MAJER

Academic year	2018/19
Course	MATEMATICA
Code	561AA
Credits	15

Modules	Area	Type	Hours	Teacher(s)
ANALISI MATEMATICA 1	MAT/05	LEZIONI	120	PIETRO MAJER

Programma (contenuti dell'insegnamento)

Insiemi, costruzioni sugli insiemi. Relazioni, funzioni, grafici. Numeri naturali, buon ordinamento, principio di induzione. Somma di progressioni aritmetiche e geometriche. Numeri interi, numeri razionali; gruppi e campi. Relazioni d'ordine. Irrazionalità della radice quadrata di due e della sezione aurea. Stima a priori per gli zeri di un polinomio. Disuguaglianza fra la media aritmetica e geometrica. Gruppi e campi ordinati. Il campo delle frazioni razionali **Q**(x). Maggioranti e minoranti di insiemi numerici.
Estremo superiore e inferiore. Assioma di completezza per campi ordinati. Esistenza di campi ordinati completi; unicità meno di un unico isomorfismo ordinato. Un campo ordinato è completo se e solo se è archimedeo massimale. Il campo dei numeri reali. Estremo superiore: varie nozioni derivate e sue proprietà.
Intervalli. Insiemi densi. Sottogruppi additivi di **R**. Radice n -sima di numeri reali positivi. Disuguaglianza di Bernoulli. Somme infinite per famiglie di numeri reali positivi. Proprietà delle somme infinite: monotonia, associatività. Somme doppie. Successioni e limiti.
Intorni. Successioni divergenti positivamente e negativamente. Intorni di infinito positivo e negativo.
Limiti e ordine: permanenza del segno; teorema dei due carabinieri; successioni crescenti convergono all'estremo superiore dei termini. Proprietà algebriche: somme, prodotti. Serie di numeri reali. Famiglie sommabili a termini qualunque: associatività, confronto. Serie
assolutamente convergenti. Esponenziale di numeri reali. Logaritmo naturale e sue proprietà.
Approssimazione della funzione esponenziale e stime di convergenza. Teorema di convergenza dominata per serie e per famiglie sommabili. La serie esponenziale. Il numero e è irrazionale. Funzioni continue di una variabile reale; definizioni equivalenti. Composizione di funzioni continue. Somme e prodotti.
Successioni convergenti e funzioni continue. Funzioni lipschitziane. Lipschitzianità locale delle funzioni 1/x, exp(x) e log(x) . Permanenza del segno per funzioni continue. Teorema degli zeri. Connessione di **R**.
Il campo dei numeri complessi. Numeri complessi come applicazioni lineari conformi. Somma, prodotto, reciproco, coniugio, modulo, parte reale e parte immaginaria. Distanze e spazi metrici. Dischi e intorni, successioni convergenti. Successioni e limiti in campo complesso. Serie, serie assolutamente convergenti, famiglie sommabili di numeri complessi. La successione esponenziale e la serie esponenziale complesse. Lipschitzianità sui semipiani. Funzioni trigonometriche. Il numero ?. Rappresentazione polare di un numero complesso.
Radici dell'unità. Limiti di funzioni, regole di calcolo. Notazione di Edmund Landau (o & O) e regole di calcolo. Sviluppi al primo ordine e derivata. Derivate di 1/x, x^1/2 , x^2; exp(x), log(x), cos(x), sin(x) . Regole di calcolo: somma, prodotto, composizione di funzioni e funzione inversa. Caratterizzazione degli omeomorfismi fra intervalli. Compattezza sequenziale. Massimi e minimi di funzioni. Teorema di Weierstrass. Principio variazionale di Fermat; teoremi di Rolle e di Lagrange. Derivate e monotonia. Sviluppo polinomiale di ordine n in un punto c per una funzione reale o complessa. Sua unicità modulo (x-c)^(n+1) . Regole di calcolo: somma, prodotto, composizione di funzioni, funzione inversa. Polinomio di Taylor. Formula del resto di Peano. Applicazioni del teorema di Taylor: decomposizione in frazioni semplici per funzioni razionali P(z)/Q(z). Problema di interpolazione di Hermite via teorema cinese del resto. Formula del resto di Lagrange. Sviluppo di Taylor e stima del resto per alcune funzioni elementari. Caratterizzazione delle funzioni di classe C^n(I) : una funzione su un intervallo aperto I è di classe C^n se e solo se in ogni punto x ammette uno sviluppo
polinomiale di ordine n a coefficienti continui. Teorema Fondamentale dell'Algebra: la dimostrazione variazionale con il minimo modulo di P(z). Prodotti infiniti di numeri complessi. Teorema di convergenza dominata per prodotti infiniti. Prodotto infinito per sin(z). Somma della serie dei reciproci dei
quadrati. Continuità uniforme. Le funzioni Lipschitziane sono uniformemente continue. La funzione x^2 non è uniformemente continua su **R.** Una funzione è uniformemente continua se e solo se ammette un modulo di continuità. Teorema di Heine-Cantor. Somma superiore e inferiore alla Riemann per una funzione rispetto a una suddivisione. Integrale superiore e inferiore. Funzioni integrabili secondo Riemann. Integrabilità delle funzioni continue e delle funzioni monotone. Le funzioni integrabili secondo Riemann sull'intervallo [a, b] sono uno spazio vettoriale di funzioni. Linearità dell'integrale e additività rispetto al dominio. Composizione con funzioni continue. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Primitive e funzioni integrali. Regola di integrazione per parti e per sostituzione. Calcolo dell'integrale int_0^? sin(x)^n dx. Prodotto di

Wallis per ?. Formula asintotica per il coefficiente binomiale centrale. Formula di Stirling per n! . Volume della palla euclidea in **R**^n e dei solidi di rotazione. Resto in forma integrale nello sviluppo di Taylor. Integrali impropri. Test integrale per la convergenza delle serie. Norme. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Teorema del valor medio per curve in **R**. Lunghezza di una curva in **R**^n secondo una data norma. Caso delle curve di classe C^1 : la formula integrale per la lunghezza. Insiemi trascurabili secondo Lebesgue e proprietà. Caratterizzazione delle funzioni integrabili secondo Riemann e conseguenze. Serie di potenze in campo complesso: centro e raggio di convergenza. Cambio di centro in una serie di potenze. Funzioni analitiche reali e complesse. Derivabilità delle funzioni analitiche. Somma, prodotto e composizione di funzioni analitiche. Connessione. Teorema degli zeri isolati. Teorema del massimo modulo. Limite sotto il segno di integrale. Integrazione per serie. Formula di Cauchy per i coefficienti dello sviluppo in serie di una funzione analitica. Stima dei coefficienti e del raggio di convergenza. Applicazioni: serie generatrici. I numeri di Catalan. Equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti. Spazio delle soluzioni. Nucleo e immagine di un operatore P(D) con P in **C**[z] . Proprietà asintotiche delle soluzioni di P(D)u = 0 in termini delle radici del polinomio P . L'equazione non omogenea P(D)u = f : il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Stime asintotiche per i coefficienti di serie di potenze. Derivazione della formula di Stirling dalla formula di Cauchy applicata a exp(z) . Problema del cambio della moneta: serie generatrice e stime di Schur sui coefficienti. Funzione Gamma, ?(x) e funzione fattoriale x! . L'equazione funzionale f(x) = f(x-1) + 1/x . Caratterizzazione della funzione Gamma di Artin-Bohr-Mollerup. Formule: prodotto infinito di Weierstrass, limite di Gauss, integrale di Eulero per ?(x). Formula di riflessione di Eulero. Alcune formule asintotiche legate alla funzione Gamma. Derivazione della formula di Stirling per la funzione fattoriale via metodo della fase stazionaria. La funzione Beta di Eulero e sua espressione in termini di ?(x). Formula di moltiplicazione di Gauss per la funzione Gamma. Polinomi di Bernstein. Densità uniforme dei polinomi nelle funzioni continue. Se f è una funzione di classe C^k i suoi polinomi di Bernstein convergono uniformemente a f con tutte le derivate fino al k-simo ordine.

Ultimo aggiornamento 29/09/2018 00:05