UNIVERSITÀ DI PISA

ALGEBRA LINEARE E ANALISI MATEMATICA II

MASSIMO GOBBINO

Anno accademico	2019/20
CdS	INGEGNERIA ELETTRONICA
Codice	591AA
CFU	12

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
ALGEBRA LINEARE	MAT/03	LEZIONI	60	ROBERTO DVORNICICH LEONE SLAVICH
ANALISI MATEMATICA	MAT/05	LEZIONI	60	MASSIMO GOBBINO

Obiettivi di apprendimento

Modalità di verifica delle conoscenze
Esame scritto e orale.

Modalità di verifica delle capacità
Esame scritto e orale.

Prerequisiti (conoscenze iniziali)

Modulo di Algebra Lineare

- Tutto il precorso (in particolare polinomi, geometria analitica, trigonometria).
- Parte del corso di Analisi Matematica 1 (in particolare insiemi e funzioni, principio di induzione, numeri complessi).

Modulo di Analisi 2

- Tutto il precorso, in particolare saper disegnare insiemi del piano descritti mediante equazioni e/o disequazioni e saper risolvere sistemi di equazioni.
- Tutto il corso di Analisi Matematica I (studi di funzione, limiti, calcolo integrale).
- Tutto il corso di Algebra Lineare (vettori, geometria analitica nel piano e nello spazio, matrici, forme quadratiche).

Programma (contenuti dell'insegnamento)

Modulo di Algebra Lineare

Spazi vettoriali ed applicazioni lineari.

- Campi e spazi vettoriali. Sottospazi vettoriali.
- Dipendenza e indipendenza lineare, generatori, basi e componenti di un

vettore rispetto ad una base, dimensione di uno spazio e di un sottospazio vettoriale. Span di un insieme di vettori.
- Somma ed intersezione di sottospazi vettoriali. Formula di Grassmann. Somma diretta di sottospazi e componenti di un vettore rispetto ad una somma diretta.
- Applicazioni lineari. Matrice associata ad un'applicazione lineare dopo aver scelto basi in partenza ed arrivo.
- Operazioni tra matrici: somma, prodotto per uno scalare, prodotto tra matrici. Trasposta ed inversa di una matrice. Calcolo della matrice inversa mediante l'algoritmo di Gauss-Jordan e mediante la matrice dei cofattori.
- Matrici di cambio di base. Similitudine tra matrici.
- Nucleo e immagine di un'applicazione lineare. Teorema della dimensione. Legami tra iniettività, surgettività e dimensioni degli spazi di partenza ed arrivo per applicazioni lineari.
- Determinante di una matrice: definizione, principali proprietà, esistenza, unicità. Calcolo mediante l'algoritmo di Gauss e gli sviluppi di Laplace. Determinante della trasposta, dell'inversa, del prodotto.
- Rango di una matrice. Equivalenza tra R-rango, C-rango, D-rango. Calcolo del rango mediante i minori e mediante l'algoritmo di Gauss.
- Autovalori, autovettori, autospazi. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore.
- Polinomio minimo, polinomio caratteristico. Relazioni tra coefficienti del polinomio caratteristico, traccia, determinante, autovalori.
- Forme canoniche. Criteri di diagonalizzabilità sui reali e sui complessi. Forma canonica di Jordan sui reali e sui complessi. Applicazioni e matrici simmetriche. Teorema spettrale.

Prodotti scalari e forme quadratiche

- Prodotto scalare canonico in R^n. Norma e distanza.
- Basi ortogonali e ortonormali. Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.
- Matrici ortogonali.
- Ortogonale di un sottospazio. Proiezioni ortogonali su sottospazi.
- Forme quadratiche e matrici ad esse associate. Definizione di segnatura.
- Metodi per determinare la segnatura di una forma quadratica: completamento dei quadrati, segno degli autovalori, metodo di Sylvester (minori orlati), metodo di Cartesio (segno dei coefficienti del polinomio caratteristico).
- Prodotti scalari in generale e matrici ad essi associate. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

- Basi ortogonali ed ortonormali (e procedimento di ortogonalizzazione) rispetto ad un generico prodotto scalare definito positivo.
- Applicazioni simmetriche rispetto ad un generico prodotto scalare e proprietà delle matrici ad esse associate. Teorema spettrale rispetto ad un generico prodotto scalare definito positivo.

Geometria analitica

- Vettori geometrici nel piano, nello spazio, e più in generale in R^n.
- Geometria analitica nel piano. Equazioni cartesiane e parametriche di rette. Angoli e distanze.
- Geometria analitica nello spazio. Equazioni cartesiane e parametriche di rette e piani. Angoli e distanze tra rette e piani.
- Equazioni cartesiane e parametriche di sottospazi affini di R^n.
- Affinità e isometrie in R^n. Teorema di struttura delle isometrie in R^n.
- Isometrie nel piano e loro classificazione sulla base dei punti fissi. Rotazioni intorno a punti e simmetrie rispetto a rette.
- Isometrie nello spazio e loro classificazione sulla base dei punti fissi. Rotazioni intorno a rette e simmetrie rispetto a piani.

Sistemi lineari

- Scrittura di un sistema lineare in termini di matrici e vettori. Interpretazioni in termini di combinazioni lineari, Span, ed in termini di applicazioni lineari.
- Struttura generale dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare, omogeneo e non omogeneo.
- Matrici a scala e risoluzione di un sistema lineare mediante algoritmo di Gauss.
- Risolubilità di un sistema lineare e rango: teorema di Rouché-Capelli.
- Metodo di Cramer per sistemi lineari.

Modulo di Analisi 2

Calcolo differenziale in più variabili

- Lo spazio R^n. Vettori e operazioni tra vettori. Norma, distanza, prodotto scalare.
- Funzioni di più variabili e loro grafico. Visualizzazione del grafico per funzioni di due variabili: linee di livello e restrizione alle rette (o curve) passanti per un punto.
- Limiti e continuità per funzioni di più variabili. Relazione tra il limite ed il limite delle restrizioni.
- Limiti all’infinito per funzioni di più variabili.
- Derivate parziali e direzionali per una funzione di più variabili e loro

significato geometrico. Mancanza di relazioni tra l'esistenza delle derivate parziali e direzionali in un punto e la continuità nel punto stesso.

- Differenziale per funzioni di più variabili e sua interpretazione geometrica in termini di (iper)piano tangente al grafico. Relazione tra le derivate direzionali e le derivate parziali per una funzione differenziabile. Gradiente e suo significato geometrico. Teorema del differenziale totale.
- Derivate successive per funzioni di più variabili. Teorema di inversione dell'ordine di derivazione. Formula di Taylor in due o più variabili.
- Massimi e minimi locali e globali per funzioni di più variabili. Se in un punto di massimo o minimo interno una funzione è differenziabile, allora il suo gradiente si annulla.
- Richiami sulle forme quadratiche in più variabili: nozione di forma definita positiva e definita negativa.
- Matrice Hessiana e comportamento locale di una funzione in un intorno di un punto stazionario. Convessità e concavità in più variabili.
- Insiemi compatti in R^n. Teorema di Weierstrass per funzioni di più variabili. Generalizzazioni del teorema di Weierstrass nel caso di insiemi non limitati.
- Massimi e minimi vincolati: metodo delle linee di livello.
- Massimi e minimi vincolati: metodo di parametrizzazione del vincolo.
- Massimi e minimi vincolati: metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
- Calcolo differenziale per funzioni da R^n ad R^m. Matrice Jacobiana.
- Derivazione di funzioni composte. Derivazione di integrali dipendenti da parametro.

Calcolo integrale in più variabili

- Integrale di Riemann per funzioni di due o tre variabili e suo significato geometrico/fisico.
- Formula di riduzione di un integrale doppio a due integrali semplici mediante sezioni.
- Integrali tripli: formule di riduzione per sezioni e per colonne.
- Sfruttamento delle simmetrie per semplificare il calcolo di integrali doppi o tripli.
- Calcolo di aree, volumi e baricentri mediante integrali doppi e tripli.
- Coordinate polari nel piano. Coordinate cilindriche e sferiche nello spazio. Utilizzo delle coordinate polari e sferiche per il calcolo di integrali multipli.
- Formula generale per il cambio di variabili negli integrali doppi.
- Solidi di rotazione. Teorema di Guldino per il volume dei solidi di rotazione.
- Integrali impropri in più variabili: definizioni e studio della convergenza.

Curve, superfici, calcolo vettoriale

- Curve: definizione. Curve chiuse e semplici. Vettore, versore e retta tangente.
- Lunghezza di una curva: definizione e calcolo.
- Integrali curvilinei (integrale di una funzione lungo una curva).
- Forme differenziali.
- Integrale di una forma differenziale lungo un curva. Forme differenziali esatte e potenziali.
- Insiemi connessi, convessi, stellati, semplicemente connessi. Forme differenziali chiuse. Relazioni tra forme differenziali chiuse ed esatte.
- Superfici: definizioni, versore normale, piano tangente.
- Area di una superficie: definizione e calcolo.
- Teorema di Guldino per il calcolo dell'area di una superficie di rotazione.
- Integrali superficiali (integrale di una funzione su una superficie).
- Operatori differenziali: divergenza, rotore, Laplaciano, gradiente. Relazioni tra gli operatori differenziali.
- Orientazione di una superficie e del suo eventuale bordo.
- Formula di Gauss-Green (teorema della divergenza): enunciati ed applicazioni.
- Formula di Stokes (teorema del rotore): enunciati ed applicazioni.

Ultimo aggiornamento 26/09/2019 11:44