



# UNIVERSITÀ DI PISA

---

## GEOMETRIA E TOPOLOGIA DIFFERENZIALE

### ENRICO LE DONNE

Anno accademico	2019/20
CdS	MATEMATICA
Codice	055AA
CFU	6

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
GEOMETRIA E TOPOLOGIA DIFFERENZIALE	MAT/03	LEZIONI	60	ENRICO LE DONNE

#### Obiettivi di apprendimento

##### *Conoscenze*

Lo studente dovrà maturare una solida conoscenza delle prime nozioni di geometria differenziale di curve e superfici, e delle nozioni fondamentali di topologia differenziale per varietà immerse. Dovrà inoltre conoscere i risultati fondamentali della teoria del grado in ogni dimensione e padroneggiarne alcune applicazioni (quali il teorema fondamentale dell'algebra, il teorema del punto fisso di Brouwer, il teorema di (non) pettinabilità delle sfere e il Teorema di Poincaré-Hopf).

##### *Modalità di verifica delle conoscenze*

Metodi:

- Esame scritto finale.
- Esame orale finale.

Nell'esame scritto lo studente dovrà dimostrare conoscere i risultati fondamentali sulla geometria delle curve e delle superfici nello spazio Euclideo. Durante l'esame orale, lo studente dovrà dimostrare di avere compreso a fondo gli elementi di topologia differenziale relativi alla teoria delle varietà di dimensione generica immerse nello spazio Euclideo, con particolare riferimento alla teoria del grado e alle sue applicazioni.

##### *Capacità*

Lo studente dovrà essere in grado di determinare curvatura e torsione di curve, e i vari tipi di curvatura delle superfici immerse nello spazio Euclideo. Inoltre, dovrà essere in grado di applicare il Teorema Egregium di Gauss ed il Teorema di Gauss-Bonnet a casi specifici. Infine, dovrà essere in grado di dimostrare tutti i risultati enunciati nel corso relativi alla teoria delle varietà e alla teoria del grado, e ad applicarli a casi specifici anche non trattati a lezione.

##### *Modalità di verifica delle capacità*

Metodi:

- Esame scritto finale.
- Esame orale finale.

Nell'esame scritto lo studente dovrà risolvere esercizi sulla geometria delle curve e delle superfici nello spazio Euclideo, mostrando di avere sviluppato le capacità sopra citate. Durante l'esame orale, lo studente dovrà dimostrare di avere compreso a fondo gli elementi di topologia differenziale relativi alla teoria delle varietà di dimensione generica immerse nello spazio Euclideo, con particolare riferimento alla teoria del grado e alle sue applicazioni; dovrà inoltre essere in grado di applicare tali risultati per risolvere brevi esercizi.

##### *Comportamenti*

Lo studente dovrà sviluppare la capacità di dialogare sui contenuti del corso sia con i propri compagni sia con il docente utilizzando un linguaggio adeguato alla materia, ovvero conciso, rigoroso ed espressivo.

##### *Modalità di verifica dei comportamenti*

L'esame orale sarà la sede privilegiata di verifica dei comportamenti sopra citati.



## UNIVERSITÀ DI PISA

### Prerequisiti (conoscenze iniziali)

Topologia generale. Elementi di topologia algebrica (gruppo fondamentale e rivestimenti). Calcolo in una e più variabili.

### Indicazioni metodologiche

Metodo di insegnamento

- Lezioni frontali

Frequenza: consigliata

### Programma (contenuti dell'insegnamento)

1. Curve: supporto, parametrizzazione, riparametrizzazione, lunghezza d'arco. Curve regolari e biregolari. Orientazione di spazi vettoriali e prodotto vettore. Riferimento di Frenét, curvatura, torsione. Teorema fondamentale delle curve.
2. Richiami su mappe lisce tra aperti di spazi Euclidei. Mappe lisce tra sottoinsiemi generici di spazi Euclidei. Cono e spazio tangente. Differenziale. Varietà, parametrizzazioni locali, carte, atlanti. Caratterizzazione locale di immersioni e sommersioni. Gruppi di Lie. Topologia di alcuni gruppi di matrici. Orientabilità (con particolare attenzione al caso delle ipersuperfici).
3. Teoria metrica delle superfici. I e II forma fondamentale, mappa di Gauss, curvatures e direzioni principali, curvatura normale di curve, curvatura di Gauss. Locali isometrie e grandezze intrinseche. Simboli di Christoffel. Teorema Egregium. Campi lungo curve e derivata covariante. Flusso di campi vettoriali e parametrizzazioni ortogonali. Geodetiche: definizione, esistenza e unicità locali. Teorema di Clairaut. Caratteristica di Eulero-Poincaré. Teorema di Gauss-Bonnet locale e globale.
4. Teoria del grado e applicazioni: Diffeomorfismi locali e rivestimenti. Teorema fondamentale dell'algebra. Classificazione delle 1-varietà. Lemma di Sard (senza dimostrazione). Omotopie e isotopia. Teorema di non retrazione. Teorema di Brower. Grado intero: definizione e proprietà. Pettinabilità delle sfere. Definizione di indice per zeri isolati di campi vettoriali. Lemma di Hopf. Fibrato normale e intorno tubolare. Teorema di Poincaré-Hopf.

### Bibliografia e materiale didattico

M. P. Do Carmo, "Differential geometry of curves and surfaces"

M. Abate, F. Tovena, "curves and surfaces",

<https://www.springer.com/gp/book/9788847019409>

T. Shifrin, "DIFFERENTIAL GEOMETRY: A First Course in Curves and Surfaces", available

at <http://alpha.math.uga.edu/~shifrin/ShifrinDiffGeo.pdf>

J. Milnor, "Topology from the differentiable viewpoint"

### Modalità d'esame

Per superare l'esame, ogni studente dovrà superare sia un esame scritto nel quale è richiesta la risoluzione di esercizi sulla geometria delle curve e delle superfici nello spazio Euclideo, sia un esame orale che verte sulla teoria generale delle varietà e sugli elementi di topologia differenziale trattati nel corso.

Ultimo aggiornamento 30/09/2019 12:33