



## UNIVERSITÀ DI PISA

---

### ELEMENTI DI PROBABILITÀ E STATISTICA

**MARCO ROMITO**

Anno accademico 2019/20  
CdS MATEMATICA  
Codice 052AA  
CFU 6

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
ELEMENTI DI PROBABILITÀ E STATISTICA	MAT/06	LEZIONI	60	GIACOMO FILIPPO DI GESU' MARCO ROMITO

#### Obiettivi di apprendimento

##### *Conoscenze*

Lo studente al termine del corso avrà acquisito la conoscenza dei concetti di base della probabilità e della inferenza statistica.

##### *Modalità di verifica delle conoscenze*

Lo studente sarà valutato riguardo la sua abilità di risolvere esercizi sulla probabilità elementare e sulla inferenza statistica, di formulare i risultati più importanti del corso e saperli dimostrare, di discutere i concetti principali esaminati durante le lezioni.

##### *Capacità*

Lo studente sarà in grado di comprendere argomenti elementari di probabilità e inferenza statistica. Lo studente sarà inoltre in grado di impostare e risolvere semplici problemi relativi a tali argomenti.

##### *Modalità di verifica delle capacità*

Nella prova scritta sarà verificata la capacità dello studente di risolvere semplici problemi. Nella prova orale sarà verificata la capacità di comprensione e di elaborazione degli argomenti analizzati.

##### *Comportamenti*

Il corso permetterà di affrontare semplici problemi di natura probabilistica e statistica.

##### *Modalità di verifica dei comportamenti*

Nel corso degli esami agli studenti sarà richiesto di suggerire soluzioni a semplici problemi e a fornire esempi dei concetti principali del corso.

##### *Prerequisiti (conoscenze iniziali)*

Lo studente deve avere padronanza degli argomenti degli insegnamenti di analisi, aritmetica e algebra lineare del primo anno di corso.

##### *Indicazioni metodologiche*

Il corso prevede lezioni frontali sia per la parte teorica che per la parte di esercizi. La frequenza è consigliata. Ci si aspetta che lo studente frequenti le lezioni e a questo affianchi un tempo sufficiente per lo studio individuale.

##### *Programma (contenuti dell'insegnamento)*

###### **PROBABILITÀ**

- Introduzione al concetto di probabilità. Modello di probabilità uniforme, proprietà ed esempi elementari. Modello di probabilità finita, proprietà, funzione di densità discreta.
- Indipendenza di eventi, esempi elementari. Indipendenza di famiglie di eventi, esempi. Probabilità condizionata: definizione e esempi, probabilità condizionata e indipendenza. Formula di disintegrazione e formula di Bayes. Formula di fattorizzazione per intersezioni di eventi. Esperimento a prove ripetute indipendenti. Calcolo delle probabilità del numero di successi per probabilità  $p$  di successo arbitraria, moda del numero di successi per probabilità  $p$  di successo generica. Teorema di De Moivre-Laplace, legge dei grandi numeri per esperimenti a prove ripetute indipendenti.



## UNIVERSITÀ DI PISA

- Spazi di probabilità discreti, esempi: distribuzione geometrica e primo successo in un esperimento a prove ripetute indipendenti, distribuzione di Poisson. Indipendenza di famiglie numerabili di eventi. Legge degli eventi rari.
- Variabile aleatoria, legge. uguaglianza in legge, esistenza di una variabile aleatoria con legge assegnata. Valore atteso: definizione e proprietà. Momenti, varianza. Valore medio come minimizzante dello scarto quadratico medio. Variabili aleatorie indipendenti: definizione, proprietà equivalenti, indipendenza di sottofamiglie di variabili aleatorie indipendenti, indipendenza di variabili aleatorie e di eventi. Covarianza. Vettori aleatori, leggi congiunte, distribuzioni marginali. Distribuzioni marginali dalle leggi congiunte. Correlazione: definizione e proprietà. Distribuzione condizionale, valore atteso condizionato.
- Teorema del limite centrale: enunciato e discussione. Disuguaglianza di Markov, disuguaglianza di Chebychev, legge (debole) dei grandi numeri. Discussione sul tasso di convergenza, teorema (di concentrazione).
- Modello generale: Sigma algebre, spazi di probabilità. Variabili aleatorie, legge di una variabile aleatoria, funzione di distribuzione cumulata e sue proprietà. Esistenza di una variabile aleatoria assegnata una funzione di distribuzione cumulata. Funzione di distribuzione cumulata per variabili aleatorie discrete. Densità continua di probabilità. Funzione di distribuzione cumulata e densità. Funzione di distribuzione cumulata congiunta e densità continua congiunta di variabili aleatorie. Densità marginali di variabili aleatorie. Densità condizionale. Indipendenza di variabili aleatorie. Indipendenza e funzioni di distribuzione cumulate, indipendenza e densità continue. Densità della somma di variabili aleatorie indipendenti.

### **STATISTICA**

- Cenni sulla statistica descrittiva. Illustrazione di un esempio motivazionale di introduzione alla statistica inferenziale (lancio ripetuto di una moneta): problema dell'identificazione del valore della probabilità di una data faccia, problema dell'identificazione di un range "ragionevole" per il valore della probabilità di una data faccia, problema della plausibilità in termini di test statistici.
- Modello statistico, campione. Modello statistico generato da un campione. Stimatore, stimatore non distorto, consistenza di una successione di stimatori. Rischio quadratico di uno stimatore. Funzione di verosimiglianza, stimatori di massima verosimiglianza, esempi. Modelli esponenziali, consistenza di stimatori di massima verosimiglianza su modelli esponenziali.
- Regioni di fiducia, esempi. Stimatori pivotali. Introduzione ai test statistici. Formulazione dell'ipotesi, pianificazione dell'esperimento: regione critica, errori di prima e seconda specie, livello di un test e potenza di un test. Modelli a rapporto di verosimiglianza crescente. Lemma di Neyman-Pearson (solo enunciato). Test unilatero per modelli a rapporto di verosimiglianza crescente. Soglia di accettazione (p-value).
- Popolazioni Gaussiane, indipendenza tra media e varianza campionarie, e loro distribuzione, stimatori di massima verosimiglianza per popolazioni Gaussiane. Popolazioni Gaussiane con varianza nota: intervalli di fiducia per la media, Z-test bilatero e unilatero. Popolazioni Gaussiane con varianza non nota: intervalli di fiducia per la media, test bilatero e unilatero per la media, intervalli di fiducia per la varianza, test unilatero per la varianza.

### **CATENE DI MARKOV**

- Introduzione alle catene di Markov. Formulazione di proprietà equivalenti della proprietà di Markov. Catene di Markov omogenee. Matrice di transizione, matrici stocastiche. Esempi. Probabilità di transizione a n passi, formula di Chapman-Kolmogorov. Legge della catena a tempo fissato, descrizione della legge in termini della distribuzione iniziale e delle probabilità di transizione.
- Stati ricorrenti e transienti. Istante di primo passaggio e sua distribuzione, ricorrenza in termini dell'istante di primo passaggio. Ricorrenza in termini del numero di visite. Formula tra le funzioni generatrici dell'istante di primo passaggio e dell'istante di passaggio. Caratterizzazione della ricorrenza in termini delle probabilità di transizione ad n passi. Tempo medio di ritorno, stati ricorrenti positivi e ricorrenti nulli. Periodo di uno stato.
- Comunicazione e intercomunicazione. Invarianza delle nozioni di transienza, ricorrenza e periodo per stati intercomunicanti. Classi chiuse e irriducibili. Teorema di decomposizione. Caso particolare: spazio degli stati finito. Distribuzioni stazionarie. Teorema di esistenza e unicità di soluzioni stazionarie e di convergenza.

### **Bibliografia e materiale didattico**

Testi consigliati:

- F. Caravenna, P. Dai Pra, *Probabilità. Una introduzione attraverso modelli e applicazioni*
- P. Baldi, *Calcolo delle probabilità e statistica*.

### **Indicazioni per non frequentanti**

Attraverso la pagina web del corso, tenersi al corrente del programma svolto.

### **Modalità d'esame**

L'esame è composto da una prova scritta e una prova orale. La prova scritta può essere eventualmente rimpiazzata da prove intermedie svolte durante il corso.

La prova scritta consiste nella risoluzione di 3-4 problemi, sviluppati su più quesiti.

La prova orale consiste in un colloquio che prevede tipicamente tre domande, volte a verificare la conoscenza dei risultati illustrati nel corso e delle loro dimostrazioni, dei concetti e delle definizioni principali, e la padronanza di tali concetti attraverso esempi illustrativi.

Modalità eccezionali per gli appelli estivi (Giugno, Luglio): la prova scritta si svolgerà con le stesse modalità previste, ma sarà svolta a casa dai candidati. La prova orale sarà svolta mediante un colloquio telematico sulla stessa riunione Meet usata per le lezioni.

### **Pagina web del corso**

[http://people.dm.unipi.it/romito/Teaching/2020/elem\\_prst](http://people.dm.unipi.it/romito/Teaching/2020/elem_prst)

