UNIVERSITÀ DI PISA

ANALISI REALE

VALENTINO MAGNANI

Anno accademico	2020/21
CdS	MATEMATICA
Codice	740AA
CFU	6

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
ANALISI REALE	MAT/05	LEZIONI	48	VALENTINO MAGNANI

Obiettivi di apprendimento

Conoscenze

Conoscenza degli elementi fondamentali di teoria della misura e teoria dell'integrazione in spazi mensurali, comprendendo l'integrale di Lebesgue ed il confronto con la teoria di Riemann. Studio delle misure boreliane, di Radon, di Carathéodory e di Hausdorff. Conoscenza dei teoremi di Lusin, e di Egorov. Teoremi di Fatou, di Beppo Levi e di Lebesgue. Misure prodotto, teorema di Tonelli e di Fubini su spazi mensurali. Teorema di rappresentazione di Riesz, spazi di Lebesgue astratti, loro proprietà basilari, misure a valori in uno spazio di Banach, cenni all'integrale di Bochner, misure assolutamente continue rispetto ad un'altra misura e teorema di Radon-Nikodym. Teoremi di ricoprimento di Vitali, differenziabilità quasi ovunque delle funzioni monotone, funzioni assolutamente continue e a variazione limitata in spazi metrici, caratterizzazione delle funzioni assolutamente continue tramite il teorema fondamentale del calcolo.

Modalità di verifica delle conoscenze

La verifica dell'apprendimento avviene tramite un'unica prova orale che verte su tutto il programma d'esame. Qui sono richiesti tutti i risultati del corso, la capacità di saperli esporre e dimostrare, affrontando eventuali esercizi.

Capacità

Lo studente avrà acquisito la padronanza dei principali risultati di Analisi Reale, con il rigore necessario per un loro corretto utilizzo nei diversi campi della Matematica, quali l'Analisi Funzionale, la Teoria delle Probabilità e la Teoria Geometrica della Misura.

Modalità di verifica delle capacità

Tutti i risultati del corso sono sviluppati in modo autonomo, ovvero sono costruiti partendo dai fondamenti. Quindi la verifica delle capacità richiede che lo studente sia in grado di ricostruire il risultato più complesso partendo dalle basi. La capacità di risolvere eventuali esercizi rafforzerà tale verifica.

Comportamenti

Lo studente sarà in grado di continuare, anche autonomamente, il percorso formativo nel campo dell'Analisi Reale, incentrandosi sugli sviluppi più avanzati.

Modalità di verifica dei comportamenti

La verifica della comprensione e delle applicazioni dell'Analisi Reale avviene nella valutazione della corretta esposizione dei teoremi e delle loro dimostrazioni.

Prerequisiti (conoscenze iniziali)

Anche se il corso si costruisce con concetti elementari, come quelli di funzione e di insieme, la conoscenza dei corsi di Analisi Matematica del primo e del secondo anno sono importanti, soprattutto in relazione agli esercizi e le applicazioni. Sono richieste anche la conoscenza dei primi risultati su spazi vettoriali e operatore lineari.

Indicazioni metodologiche

Il corso è costituito da lezioni frontali alla lavagna. Sebbene le lezioni in sostanza presentino tutto il programma del corso, lo studente dovrà integrare il programma con uno studio individuale che comprende anche gli esercizi dati a lezione e l'eventuale ausilio dei testi consigliati. La frequenza è fortemente consigliata.

Programma (contenuti dell'insegnamento)

1. **Misure e misure esterne**. Spazi mensurali, misure esterne e proprietà basilari, funzioni misurabili e loro approssimazione, misura di Lebesgue, insiemi non misurabili, algebre, anelli e semianelli di insiemi, estensione di Carathéodory-Hahn.
2. **Teoria dell'integrazione astratta.** Integrale di Lebesgue su uno spazio mensurale, teoremi di Beppo Levi, Fatou e Lebesgue, nozione di integrale su spazio mensurale tramite opportune somme superiori e inferiori, derivazione di integrali con parametro, differenze tra integrazione secondo Lebesgue e secondo Riemann, caratterizzazione delle funzioni integrabili secondo Riemann.
3. **Spazi di Lebesgue.** Proprietà basilari degli spazi delle funzioni p-sommabili rispetto una misura µ e loro completezza, con 1 ? p ? ?, convergenza nella norma dello spazio delle funzioni p-sommabili, convergenza puntuale q.o., in misura e relative implicazioni. Disuguaglianza di Jensen.
4. **Operazioni sulle misure.** Misure con segno, teorema di Hahn e decomposizione di Jordan per misure con segno, misure vettoriali, misure a valori in uno spazio di Banach, integrale di Bochner, assoluta continuità dell'integrale, teorema di Radon-Nikodym e perdita di validità per misure con valori in uno spazio di Banach. Rappresentazione del duale dello spazio delle funzioni p-sommabili, con 1 ? p < +?.
5. **Misure e topologia.** Misure boreliane, approssimazione di boreliani con aperti, chiusi e compatti, criterio di Carathéodory per misure boreliane, misure di Radon su spazi topologici, teorema di Lusin e densità delle funzioni continue nello spazio delle funzioni p-sommabili, teorema di rappresentazione di Riesz.
6. **Misure prodotto.** Prodotto di spazi mensurali, teoremi di Fubini e di Tonelli su spazi mensurali e controesempi ad ipotesi più deboli.
7. **Funzioni assolutamente continue e a variazione limitata.** Teorema di Vitali, differenziabilità quasi ovunque delle funzioni monotone, funzioni a variazione limitata e funzione di Cantor. Funzioni assolutamente continue e loro caratterizzazione tramite il teorema fondamentale del calcolo.
8. **Materiale opzionale.** Misura e dimensione di Hausdorff, calcolo della dimensione di Hausdorff di frattali, mappe holderiane e misura di Hausdorff, uguaglianza tra misura di Hausdorff e misura di Lebesgue, formula dell'area nello spazio euclideo.

Tutti gli argomenti del programma sono da intendersi con relative dimostrazioni.

Bibliografia e materiale didattico

[1] L.Ambrosio, G.Da Prato, A.Mennucci, Introduction to Measure Theory and Integration, Edizioni della Normale, 2011.
[2] L.Ambrosio, N.Fusco, D.Pallara, Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems, Oxford University Press, New York, 2000.
[3] L.Ambrosio, P.Tilli, Topics on analysis in metric spaces, Oxford University Press, Oxford, 2004.
[4] Y.Benyamini, J.Lindenstrauss, Geometric Nonlinear Functional Analysis, American Mathematical Society, 2000.
[5] Y.D.Burago, V.A.Zalgaller, Geometric inequalities, Grundlehren Math. Springer, Berlin, 1988.
[6] S.B.Chae, Lebesgue integration, Collana "Universitext", Springer 1995.
[7] D.L.Cohn, Measure Theory, Birkhäuser, 1980.
[8] L.C.Evans and R.F.Gariepy, Measure theory and fine properties of functions, revised edition. Textbooks in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 2015.
[9] H.Federer, Geometric measure theory, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.
[10] K.Falconer, Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications, Wiley, 2003.
[11] G.B.Folland, Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications, John Wiley and Sons, 1999.
[12] I.P.Natanson, Theory of functions of a real variable, New York, 1964.
[13] H.L.Royden and P.M.Fitzpatrick, Real Analysis, Pearson Education, 2010.

Modalità d'esame

L'esame prevede una prova orale su tutto il programma d'esame. La prova richiede la precisa conoscenza dei risultati e dei teoremi del corso assieme alle loro dimostrazioni, ove siano previste. Potrà essere richiesta opzionalmente anche la risoluzione di esercizi.

Ultimo aggiornamento 20/09/2020 01:38