



## UNIVERSITÀ DI PISA

### ANALISI MATEMATICA 2

---

PIETRO MAJER

Anno accademico

2021/22

CdS

MATEMATICA

Codice

546AA

CFU

12

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
ANALISI MATEMATICA 2	MAT/05	LEZIONI	120	PIETRO MAJER NICOLA VISCIGLIA

#### Programma (contenuti dell'insegnamento)

**Spazi normati, spazi metrici, topologia.** Norma euclidea e prodotto scalare. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Spazi normati. Spazi metrici. Topologia di uno spazio metrico. Sottospazi. Varie nozioni di compattezza per spazi topologici e per spazi metrici. Connessione. Successioni di Cauchy e completezza. Spazi di funzioni limitate su un insieme. Spazi di funzioni continue. Convergenza puntuale e uniforme. Teorema delle contrazioni. Equivalenza di norme. Serie assolutamente convergenti. Applicazioni lineari continue. Serie di Neumann. Argomento diagonale di Cantor. Teorema di Ascoli-Arzelà. Curve rettificabili; esistenza di curve di minima lunghezza fra due punti in uno spazio metrico compatto. Polinomi di Bernstein. Teorema di Stone-Weierstrass. Teorema della categoria di Baire.

**Calcolo differenziale.** Differenziale di un'applicazione fra spazi normati. Somma e composizione di applicazioni differenziabili. Derivate, gradienti, Jacobiani, derivate direzionali, derivate parziali. Differenziabilità di un'applicazione inversa. Applicazioni bilineari. Teorema del valor medio per curve. Teorema del differenziale totale. Teorema di simmetria del differenziale secondo. Hessiano. Funzioni convesse. Minimi liberi: condizioni necessarie e sufficienti. Teorema di inversione locale. Teorema della funzione implicita. Valori regolari. Sottovarietà differenziabili di  $\mathbb{R}^n$ ; tangente. Teorema di limite sotto il segno di derivata. Estremi vincolati; metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Linearità e differenziabilità in senso complesso; equazioni di Cauchy-Riemann. Funzioni analitiche reali e complesse. Teorema di non-retrazione e teorema di punto fisso di Brouwer in  $\mathbb{R}^n$ . Forme differenziali e campi vettoriali in  $\mathbb{R}^n$ . Integrale di linea. Forme esatte e chiuse. Forme localmente esatte. Continuità e derivabilità di integrali dipendenti da un parametro. Omotopie; invarianza per omotopia. Domini semplicemente connessi.

**Equazioni differenziali ordinarie in  $\mathbb{R}^n$ .** Metodi risolutivi. Soluzioni locali. Il problema di Cauchy. Teorema di esistenza e unicità locale di soluzioni del problema di Cauchy con le ipotesi di Lipschitz. Soluzioni massimali di un'equazione differenziale ordinaria. Condizioni di esistenza in grande. Esempio di non unicità locale con secondo membro continuo. Teorema di esistenza di Peano. Lemma di Gronwall. Dipendenza continua dai dati iniziali. Soluzione generale di un'equazione ordinaria. Fuga dai compatti. Equazioni lineari. Matrice di transizione. Equazioni lineari omogenee. Variazione delle costanti arbitrarie. Sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti; esponenziale di una matrice. Stabilità lineare. Dipendenza differenziabile dai dati iniziali.

**Misura e integrale.** Nozione di misura e misura esterna. Il teorema di estensione di Caratheodory (senza dimostrazione). La misura di Lebesgue in  $\mathbb{R}^n$ . Insiemi di misura nulla. Esempio di Vitali. Integrale di funzioni misurabili. Teorema di Beppo Levi. Teorema di convergenza dominata di Lebesgue. Integrazione per serie. Completezza degli spazi  $L^1(X,?)$ . Integrazione iterata. Teorema di Fubini-Tonelli. Continuità e derivabilità di integrali con parametro. Operatori di composizione. Sottospazi densi in  $L^1(X,?)$  e approssimazione. Il teorema di Radon-Nikodym (senza dimostrazione). Formula del cambio di variabile per la misura di Lebesgue. Coordinate polari. Misura superficiale. Teorema della divergenza e teorema di Gauss-Green.

Ultimo aggiornamento 11/08/2021 17:22