UNIVERSITÀ DI PISA

ANALISI MATEMATICA II E CALCOLO NUMERICO

BOZHIDAR VELICHKOV

Anno accademico	2021/22
CdS	INGEGNERIA DELL'ENERGIA
Codice	717AA
CFU	12

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
ANALISI MATEMATICA II	MAT/05	LEZIONI	60	VINCENZO MARIA TORTORELLI BOZHIDAR VELICHKOV
CALCOLO NUMERICO	MAT/08	LEZIONI	60	PAOLO GHELARDONI

Obiettivi di apprendimento

Conoscenze
Modulo CALCOLO NUMERICO. Ci si aspetta che gli studenti acquisiscano una certa consapevolezza dei concetti e dei metodi di base nell'analisi numerica applicata per risolvere problemi elementari nell'analisi matematica e nell'algebra lineare.
Modulo ANALISI MATEMATICA II. Le nozioni ed i teoremi principali dell'analisi negli spazi euclidei; caclolo differenziale e integrale in più variabili.

Modalità di verifica delle conoscenze
Modulo CALCOLO NUMERICO. Lo studente deve dimostrare la capacità di eseguire, con consapevolezza critica, le attività illustrate o svolte sotto la guida dell'insegnante durante il corso.

Metodi:

- Prova orale

Modulo ANALISI MATEMATICA II. Esame scritto e orale.

Capacità
Modulo CALCOLO NUMERICO. Alla fine del corso gli studenti avranno la capacità di analizzare problemi numerici dal punto di vista computazionale e di fornire l'implementazione Matlab di algoritmi numerici.
Modulo ANALISI MATEMATICA II. Alla fine del corso lo studente deve essere in grado di affrontare e risolvere problemi sia di calcolo che teorici, di usare i principali strumenti analitici, di spiegare e argomentare le proprie soluzioni.

Modalità di verifica delle capacità
Modulo CALCOLO NUMERICO. I criteri di valutazione delle competenze si basano sulla discussione dei contenuti del corso e sulla discussione della relazione contenente i risultati delle sperimentazioni numeriche effettuate mediante funzioni Matlab, riguardanti le attività svolte in laboratorio durante il corso.
Modulo ANALISI MATEMATICA II. Esame scritto e orale.

Comportamenti
Modulo CALCOLO NUMERICO.
Gli studenti raggiungeranno una sensibilità numerica in cui i concetti di stabilità e condizionamento numerici giocano un ruolo fondamentale, e dove minimizzare la complessità computazionale è una richiesta nella progettazione e nell'analisi degli algoritmi numerici.
Modulo ANALISI MATEMATICA II.
Essendo il programma molto ampio e la complessità degli argomenti superiore a quella affrontata durante il corso di Analisi 1, si aspetta che gli studenti affrontino le dispense del corso (che saranno messe a disposizione sul sito del corso) subito dopo, o ancora meglio, prima delle lezioni. Durante il corso numerosi esercizi (senza soluzioni e di difficolta molto variabile) saranno publicati sul sito del corso. Sarà compito dello studente cercare le soluzioni indipendentemente e, se necessario, chiedere la correzione durante le lezioni.

Modalità di verifica dei comportamenti
Modulo CALCOLO NUMERICO.
La discussione dei contenuti del corso e la discussione dell'elaborato relativo all'implementazione di due metodi numerici sono ancora una volta i criteri principali per la valutazione dei comportamenti.
Modulo ANALISI MATEMATICA II.

Prerequisiti (conoscenze iniziali)
Modulo CALCOLO NUMERICO.
Nozioni di base di Algebra Lineare e di Calcolo.
Modulo ANALISI MATEMATICA II.
Nozioni di base dell'analisi di funzioni di una variabile (Analisi 1) e di Algebra Lineare. In particolare, è indispensabile conoscere le nozioni seguenti:
- successioni e limiti di successioni, teorema di Bolzano-Weierstrass (con dimostrazione);
- funzioni continue e limiti di funzioni di una variabile; teorema di Cantor (con le dimostrazioni);
- derivate di funzioni di una variabile; teoremi di Rolle e di Lagrange; teorema di Weierstrass (con le dimostrazioni);
- integrale di Riemann - somme superiori e inferiori di Riemann; definizione di funzione integrabile secondo Riemann (tutta la costruzione con le dimostrazioni); la dimostrazione del teorema sull'integrabilità delle funzioni continue; la dimostrazione del teorema sull'integrabilità delle funzioni monotone; teorema fondamentale del calcolo integrale (con dimostrazione); teorema della media (con dimostrazione).
- forma parametrica e cartesiana di sottospazi affini, prodotto scalare e sua interpretazione geometrica, metodo di riduzione di Gauss e sue proprieta'.
- dipendenza lineare, basi, formule di Grassmann e della dimensione, rango di matrci e di trasformazioni lineari, matrici associate ad una trasformazione lineare, congruenza e similitudine.
- determinante, polinomio cartteristico, polinomio minimo, criteri di diagonalizzazione e triangolarizzazione.
- trasformazioni lineari ortogonali, loro classificazione ed interpretazione geometrica nel caso del piano e dello spazio cartesiani, matrici simmetriche e teorema spettrale.

Indicazioni metodologiche
Modulo CALCOLO NUMERICO.
Lezioni frontali

Modalità di apprendimento:

- frequentando le lezioni
- lavoro di laboratorio

Frequenza: consigliata

Metodi di insegnamento:

- lezioni
- laboratorio

Modulo ANALISI MATEMATICA II.
Lezioni frontali; frequenza: consigliata

Programma (contenuti dell'insegnamento)
Modulo CALCOLO NUMERICO. Il corso fornisce nozioni sull'analisi degli errori, l'aritmetica di macchina, l'approssimazione numerica della soluzione di equazioni non lineari, metodi efficienti per la soluzione di sistemi di equazioni lineari. Il corso affronta anche le principali questioni relative all'approssimazione delle funzioni, all'integrazione numerica e alla soluzione numerica dei problemi ai valori iniziali per le equazioni differenziali ordinarie.
Modulo ANALISI MATEMATICA II.
0. Funzioni.
0.1 Immagini e forma parametrica, preimmagini e luoghi di zeri, grafici e sottografici.
0.2 Coordinate polari, cilindriche e sferiche nello spazio.
0.3 Definizione di sottoinsieme convesso e funzione convessa: prime proprieta'.
1. Prodotti scalari, norme e distanze. Topologia in spazi metrici ed in R^n.
1.1 Spazi metrici. Prodotti scalari e disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. Distanza euclidea. Norme per operatori lineari. Disuguaglianza triangolare. L'insieme dei punti con coordinate razionali è denso. Convergenza di successioni e di funzioni di una variabile. Cammini e curve.

1.2 Insiemi aperti e insiemi chiusi. Insiemi aperti. Unione e intersezione di insiemi aperti. Prodotto di insiemi aperti. Unione e intersezione di insiemi chiusi. Prodotto di insiemi chiusi. Insiemi chiusi per successioni. Chiusura, parte interna e frontiera di un insieme.
1.3 Spazi compatti e completi. Ricoprimenti - ricoprimenti aperti, finiti e numerabili. Insiemi compatti - definizione con i ricoprimenti. Insiemi compatti per successioni. Insiemi chiusi e limitati. Teorema di equivalenza. Successioni di Cauchy e completezza: il teorema di punto fisso delle contrazioni.
1.4 *Funzioni continue*. Topologia indotta. Funzioni continue tra spazi metrici. Funzioni continue e funzioni continue per successioni. Composizione di funzioni continue. Funzioni continue su insiemi compatti. Teorema di Weierstrass. Funzioni convesse e continuita'. Uniforme continuita' ed uniforme convergenza. Convergenza puntuale.
1.5 Insiemi connessi. Insiemi connessi e insiemi connessi per archi. Un insieme aperto di R^n è connesso se e solo se è connesso per archi. Insiemi connessi in dimensione uno. Funzioni continue e insiemi connessi.
1.6 Riparametrizzazioni di cammini. Orientazione. Cammini regolari e grafici locali. Lunghezza di cammini. Parametro di lunghezza d'arco, piano osculatore e curvatura. Integrazione di funzioni non orientata su cammini. Integrazione orientata di campi su cammini. Il campo solenoidale piano e le coordinate polari.
2. Derivate parziali e direzionali.
2.1 Derivabilità e differenziabilità di funzioni tra spazi euclidei. Funzioni derivabili, funzioni differenziabili. Piani tangenti a grafici, luoghi di zeri, e immagini. Le funzioni differenziabili sono continue. Le funzioni differenziabili sono derivabili. Esempio di una funzione derivabile, ma non continua in zero. Esempio di una funzione derivabile e continua, ma non differenziabile in zero. Funzioni C^1 e C^2. Teorema del differenziale totale, funzione differenziale. Derivate parziali di ordine superiore - teoremi di Schwartz. Composizione di funzioni differenziabili. Regola della catena e formula per le derivate parziali della funzione composta. Matrice Hessiana. Diseguaglianza del valor medio. Funzioni convesse e differenziabilita'. Differenziabilita' dell'inversa. Cambi di coordinate non lineari.
2.2 Teoremi di invertibilita' locale, delle funzioni implicite e del rango. Teorema di invertibilita' locale. Teorema delle funzioni implicite (dimostrazione per funzioni di due variabili a valori reali). Teorema del rango. Sottovarieta' e sottovarieta' con bordo, e loro caratterizzazioni. Piani tangenti, vettori tangenti esterni. Superficie parametrica. Sottovarieta' regolari a pezzi e domini normali. Superficie di rotazione, di cono. Orientabilita' di superficie e di sottovarieta', orientazione indotta sul bordo. Il nastro di Moebius. Gradiente tangenziale.
2.3 *Formula di Taylor*.
2.4 Ottimizzazione. Massimi e minimi locali interni. Condizione necessaria al primo ordine. Punti critici. Condizione necessaria al secondo ordine. Matrici semidefinite positive e matrici semidefinite negative. Condizione sufficiente al secondo ordine. Matrici definite positive e matrici definite negative. Il ruolo del determinante della matrice Hessiana in dimensione due. Massimi e minimi locali sul bordo di un insieme regolare. Condizioni necessarie e sufficienti al primo e al secondo ordine in dimensione due. Vettore normale e vettore tangente al bordo di un insieme regolare. Ottimizzazione vincolata e teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Moltiplicatori e funzioni positivamente omeogenee, moltiplicatori e forme quadratiche. Proprieta' di minimizzazione degli autovalori di una matrice simmetrica. Cenno all'ottimizzazione per funzioni convesse su convessi.
3. Forme differenziali e integrali curvilinei.
3.1 Forme differenziali in R^n. 1-forme, 2-forme e k-forme in R^n - definizioni. Somma di forme differenziali. Prodotto di una forma differenziale con una funzione. Prodotto esterno tra forme differenziali. Differenziale di una funzione. Derivata esterna di una forma differenziale. Forme chiuse e forme esatte. Le forme esatte sono chiuse. Esempio di una forma chiusa ma non esatta.
3.2 Integrazione di 1-forme. Curve in R^n. Curve C^1 a tratti, curve chiuse, curve semplici. Curve equivalenti. L'opposta di una curva. Concatenamento di curve. Integrale di una 1-forma su una curva C^1 a tratti. Integrazione su curve opposte. Integrazione su curve concatenate. Integrazione su curve equivalenti. Integrazione di forme esatte su curve chiuse. Caratterizzazione delle 1-forme esatte attraverso l'integrazione su curve chiuse. In un rettangolo le forme chiuse sono esatte. In un aperto stellato le forme esatte sono chiuse. Teorema della derivazione sotto il segno dell'integrale. Domini diffeomorfi. In R^3 il toro e la palla non sono diffeomorfi.
3.3 Integrazione di funzioni su curve. Integrale di una funzione continua su una curva. Integrazione su curve equivalenti. Integrazione su curve opposte. Integrazione su curve concatenate. Approssimazione dell'integrale su una curva con delle somme parziali. Lunghezza di una curva.
4. Integrazione in R^n.
4.1 Integrale di Riemann. Integrazione di Riemann su un dominio rettangolare. Partizioni di un dominio rettangolare. Somme di Riemann superiori e inferiori. Integrale di Riemann superiore e inferiore. Integrabilità di una funzione limitata si un rettangolo. Integrabilità delle funzioni continue su domini rettangolari. Teorema di Fubini su domini rettangolari. Integrale di una funzione su un insieme limitato. Integrabilità di una funzione continua su un dominio normale. Teorema di Fubini in domini normali.
4.2 Integrazione per parti e teorema della divergenza. Formlule di Gauss-Green in domini normali. Teorema della divergenza su domini normali in dimensione due. Partizione dell'unità in domini regolari. Teorema della divergenza su domini regolari in dimensione due. Applicazione del teorema della diveregenza - Laplaciano, equazione del calore, variazione della temperatura totale e flusso di calore attraverso il bordo di un insieme regolare.
4.3 Formula di Stokes. Teorema di Stokes su domini normali in dimensione due. Orientazione in dimensione due. Curve che parametrizzano il bordo di un insieme in senso antiorario. Formula di Stokes su domini regolari in dimensione due. Le formule di Gauss-Green come conseguenza della fromula di Stokes. Diffeomorfismi e orientazione in domini bidimensionali. Cambio delle variabili in dimensione due. Integrazione in coordinate polari nel piano. Integrale della funzione Gaussiana.
4.4 Integrazione su superfici parametriche. Superfici parametriche in dimensione due. Superfici parametriche equivalmenti. Integrale di una 2-forma su una superficie parametrica in dimensione due. Integrazione su superfici parametriche equivalenti. Formula di Stokes per le superfici. Prodotto vettoriale in dimensione tre. Divergenza e rotore di un campo in dimensione tre. Versore normale a una superficie. Versore normale su superfici equivalenti. Integrazione di funzioni su superfici. Teorema del rotore. Applicazione della formula di Stokes - Legge di Faraday e la terza equazione di Maxwell.

Bibliografia e materiale didattico

Modulo CALCOLO NUMERICO.
La lettura consigliata include i seguenti testi:

- P. Ghelardoni, G. Gheri, P. Marzulli, "Elementi di calcolo numerico", Masson, 1993.
- D.A. Bini, M. Capovani, O. Menchi, "Metodi numerici per l'algebra lineare", Zanichelli, 1988.
- R. Bevilacqua, D.A. Bini, M. Capovani, O. Menchi, "Metodi Numerici", Zanichelli, 1992.

Modulo ANALISI MATEMATICA II.
Appunti del corso,
Marcellini, Sbordone - Analisi Matematica 2,
Fusco, Marcellini, Sbordone - Analisi Matematica 2,
Acerbi, Buttazzo - Analisi Matematica 2

Modalità d'esame

Modulo CALCOLO NUMERICO.
Prova orale
Modulo ANALISI MATEMATICA II.
Esame scritto e orale

Altri riferimenti web

Modulo CALCOLO NUMERICO.
https://elearn.ing.unipi.it/enrol/index.php?id=2285
Modulo ANALISI MATEMATICA II.
https://people.dm.unipi.it/velichkov/analisi2-IE-2021-2022.html

Ultimo aggiornamento 20/11/2021 09:03