UNIVERSITÀ DI PISA

ALGEBRA LINEARE E ANALISI MATEMATICA II

MARINA GHISI

Anno accademico	2022/23
CdS	INGEGNERIA ELETTRONICA
Codice	591AA
CFU	12

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
ALGEBRA LINEARE	MAT/03	LEZIONI	60	MASSIMO GOBBINO
ANALISI MATEMATICA II	MAT/05	LEZIONI	60	MARINA GHISI

Obiettivi di apprendimento

Conoscenze
Al termine del corso lo studente avrà acquisito le nozioni di base di algebra lineare e del calcolo differenziale e integrale in più variabili.

Modalità di verifica delle conoscenze
L'acquisizione delle conoscenze sarà verificata tramite esercizi in un esame scritto e domande dirette in un esame orale.

Capacità
Al termine del corso lo studente sarà in grado di effettuare le verifiche più importanti e determinare le quantità più rilevanti dell'algebra lineare e del calcolo differenziale ed integrale in più variabili.

Modalità di verifica delle capacità
L'acquisizione delle capacità sarà verificata tramite esercizi in un esame scritto e domande mirate in un esame orale.

Comportamenti
Al termine del corso lo studente saprà affrontare e risolvere semplici problemi di algebra lineare e del calcolo differenziale ed integrale in più variabili.

Modalità di verifica dei comportamenti
L'acquisizione delle competenze sarà verificata chiedendo allo studente di risolvere semplici problemi durante un esame scritto ed un esame orale.

Prerequisiti (conoscenze iniziali)

Modulo di Algebra Lineare

- Tutto il precorso (in particolare polinomi, geometria analitica, trigonometria).
- Parte del corso di Analisi Matematica 1 (in particolare insiemi e funzioni, principio di induzione, numeri complessi).

Modulo di Analisi 2

- Tutto il precorso, in particolare saper disegnare insiemi del piano descritti mediante equazioni e/o disequazioni e saper risolvere sistemi di equazioni.

- Tutto il corso di Analisi Matematica I (studi di funzione, limiti, calcolo integrale).
- Tutto il corso di Algebra Lineare (vettori, geometria analitica nel piano e nello spazio, matrici, forme quadratiche).

Indicazioni metodologiche

Lezioni registrate con messa a disposizione delle registrazioni.

Programma (contenuti dell'insegnamento)

Modulo di Algebra Lineare

Spazi vettoriali ed applicazioni lineari.

- Campi e spazi vettoriali. Sottospazi vettoriali.
- Dipendenza e indipendenza lineare, generatori, basi e componenti di un vettore rispetto ad una base, dimensione di uno spazio e di un sottospazio vettoriale. Span di un insieme di vettori.
- Somma ed intersezione di sottospazi vettoriali. Formula di Grassmann. Somma diretta di sottospazi e componenti di un vettore rispetto ad una somma diretta.
- Applicazioni lineari. Matrice associata ad un'applicazione lineare dopo aver scelto basi in partenza ed arrivo.
- Operazioni tra matrici: somma, prodotto per uno scalare, prodotto tra matrici. Trasposta ed inversa di una matrice. Calcolo della matrice inversa mediante l'algoritmo di Gauss-Jordan e mediante la matrice dei cofattori.
- Matrici di cambio di base. Similitudine tra matrici.
- Nucleo e immagine di un'applicazione lineare. Teorema della dimensione. Legami tra iniettività, surgettività e dimensioni degli spazi di partenza ed arrivo per applicazioni lineari.
- Determinante di una matrice: definizione, principali proprietà, esistenza, unicità. Calcolo mediante l'algoritmo di Gauss e gli sviluppi di Laplace. Determinante della trasposta, dell'inversa, del prodotto.
- Rango di una matrice. Equivalenza tra R-rango, C-rango, D-rango. Calcolo del rango mediante i minori e mediante l'algoritmo di Gauss.
- Autovalori, autovettori, autospazi. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore.
- Polinomio minimo, polinomio caratteristico. Relazioni tra coefficienti del polinomio caratteristico, traccia, determinante, autovalori.
- Forme canoniche. Criteri di diagonalizzabilità sui reali e sui complessi. Forma canonica di Jordan sui reali e sui complessi. Applicazioni e matrici simmetriche. Teorema spettrale.

Prodotti scalari e forme quadratiche

- Prodotto scalare canonico in R^n. Norma e distanza.
- Basi ortogonali e ortonormali. Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.
- Matrici ortogonali.
- Ortogonale di un sottospazio. Proiezioni ortogonali su sottospazi.
- Forme quadratiche e matrici ad esse associate. Definizione di segnatura.
- Metodi per determinare la segnatura di una forma quadratica: completamento dei quadrati, segno degli autovalori, metodo di Sylvester (minori orlati), metodo di Cartesio (segno dei coefficienti del polinomio caratteristico).
- Prodotti scalari in generale e matrici ad essi associate. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.
- Basi ortogonali ed ortonormali (e procedimento di ortogonalizzazione) rispetto ad un generico prodotto scalare definito positivo.
- Applicazioni simmetriche rispetto ad un generico prodotto scalare e proprietà delle matrici ad esse associate. Teorema spettrale rispetto ad un generico prodotto scalare definito positivo.

Geometria analitica

- Vettori geometrici nel piano, nello spazio, e più in generale in R^n.
- Geometria analitica nel piano. Equazioni cartesiane e parametriche di rette. Angoli e distanze.
- Geometria analitica nello spazio. Equazioni cartesiane e parametriche di rette e piani. Angoli e distanze tra rette e piani.
- Equazioni cartesiane e parametriche di sottospazi affini di R^n.
- Affinità e isometrie in R^n. Teorema di struttura delle isometrie in R^n.
- Isometrie nel piano e loro classificazione sulla base dei punti fissi. Rotazioni intorno a punti e simmetrie rispetto a rette.
- Isometrie nello spazio e loro classificazione sulla base dei punti fissi. Rotazioni intorno a rette e simmetrie rispetto a piani.

Sistemi lineari

- Scrittura di un sistema lineare in termini di matrici e vettori. Interpretazioni in termini di combinazioni lineari, Span, ed in termini di applicazioni lineari.
- Struttura generale dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare, omogeneo e non omogeneo.
- Matrici a scala e risoluzione di un sistema lineare mediante algoritmo di Gauss.

- Risolubilità di un sistema lineare e rango: teorema di Rouché-Capelli.
- Metodo di Cramer per sistemi lineari.

Modulo di Analisi 2

Calcolo differenziale in più variabili

- Lo spazio R^n. Vettori e operazioni tra vettori. Norma, distanza, prodotto scalare.
- Funzioni di più variabili e loro grafico. Visualizzazione del grafico per funzioni di due variabili: linee di livello e restrizione alle rette (o curve) passanti per un punto.
- Limiti e continuità per funzioni di più variabili. Relazione tra il limite ed il limite delle restrizioni.
- Limiti all'infinito per funzioni di più variabili.
- Derivate parziali e direzionali per una funzione di più variabili e loro significato geometrico. Mancanza di relazioni tra l'esistenza delle derivate parziali e direzionali in un punto e la continuità nel punto stesso.
- Differenziale per funzioni di più variabili e sua interpretazione geometrica in termini di (iper)piano tangente al grafico. Relazione tra le derivate direzionali e le derivate parziali per una funzione differenziabile. Gradiente e suo significato geometrico. Teorema del differenziale totale.
- Derivate successive per funzioni di più variabili. Teorema di inversione dell'ordine di derivazione. Formula di Taylor in due o più variabili.
- Massimi e minimi locali e globali per funzioni di più variabili. Se in un punto di massimo o minimo interno una funzione è differenziabile, allora il suo gradiente si annulla.
- Richiami sulle forme quadratiche in più variabili: nozione di forma definita positiva e definita negativa.
- Matrice Hessiana e comportamento locale di una funzione in un intorno di un punto stazionario. Convessità e concavità in più variabili.
- Insiemi compatti in R^n. Teorema di Weierstrass per funzioni di più variabili. Generalizzazioni del teorema di Weierstrass nel caso di insiemi non limitati.
- Massimi e minimi vincolati: metodo delle linee di livello.
- Massimi e minimi vincolati: metodo di parametrizzazione del vincolo.
- Massimi e minimi vincolati: metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
- Calcolo differenziale per funzioni da R^n ad R^m. Matrice Jacobiana.
- Derivazione di funzioni composte. Derivazione di integrali dipendenti da parametro.

Calcolo integrale in più variabili

- Integrale di Riemann per funzioni di due o tre variabili e suo significato geometrico/fisico.
- Formula di riduzione di un integrale doppio a due integrali semplici mediante sezioni.
- Integrali tripli: formule di riduzione per sezioni e per colonne.
- Sfruttamento delle simmetrie per semplificare il calcolo di integrali doppi o tripli.
- Calcolo di aree, volumi e baricentri mediante integrali doppi e tripli.
- Coordinate polari nel piano. Coordinate cilindriche e sferiche nello spazio. Utilizzo delle coordinate polari e sferiche per il calcolo di integrali multipli.
- Formula generale per il cambio di variabili negli integrali doppi.
- Solidi di rotazione. Teorema di Guldino per il volume dei solidi di rotazione.
- Integrali impropri in più variabili: definizioni e studio della convergenza.

Curve, superfici, calcolo vettoriale

- Curve: definizione. Curve chiuse e semplici. Vettore, versore e retta tangente.
- Lunghezza di una curva: definizione e calcolo.
- Integrali curvilinei (integrale di una funzione lungo una curva).
- Forme differenziali.
- Integrale di una forma differenziale lungo un curva. Forme differenziali esatte e potenziali.
- Insiemi connessi, convessi, stellati, semplicemente connessi. Forme differenziali chiuse. Relazioni tra forme differenziali chiuse ed esatte.
- Superfici: definizioni, versore normale, piano tangente.
- Area di una superficie: definizione e calcolo.
- Teorema di Guldino per il calcolo dell'area di una superficie di rotazione.
- Integrali superficiali (integrale di una funzione su una superficie).
- Operatori differenziali: divergenza, rotore, Laplaciano, gradiente. Relazioni tra gli operatori differenziali.
- Orientazione di una superficie e del suo eventuale bordo.
- Formula di Gauss-Green (teorema della divergenza): enunciati ed applicazioni.
- Formula di Stokes (teorema del rotore): enunciati ed applicazioni.

Bibliografia e materiale didattico

Modulo di Algebra Lineare
Il docente metterà a disposizione degli studenti le proprie dispense.

Indicazioni per non frequentanti

Nessuna

Modalità d'esame

L'esame consisterà di una prova scritta e di una prova orale. I dettagli delle modalità dipenderanno dalla situazione Covid.