UNIVERSITÀ DI PISA

# METODI TOPOLOGICI IN ANALISI GLOBALE

## ANTONIO MARINO

| | |
|---|---|
| Academic year | 2022/23 |
| Course | MATEMATICA |
| Code | 068AA |
| Credits | 6 |

| Modules | Area | Type | Hours | Teacher(s) |
|---|---|---|---|---|
| METODI TOPOLOGICI IN ANALISI GLOBALE | MAT/05 | LEZIONI | 48 | ANTONIO MARINO |

### Obiettivi di apprendimento

*Conoscenze*
Scopo del corso è offrire agli studenti una prospettiva e strumenti di "Analisi globale" ("Global Analysis"), con l'introduzione dei principali metodi topologici della moderna "Analisi non lineare" ("Nonlinear Analysis"), perché siano in grado di inquadrare e studiare problemi 'globali' fra analisi, geometria e fisica matematica. Fra le strutture logico-matematiche che presiedono il mondo fisico, vengono proposte alcune fondamentali strutture topologiche sottese ai fenomeni "non lineari".

*Modalità di verifica delle conoscenze*
Dato che questi studenti hanno già una certa iniziale maturità matematica e scelgono liberamente un corso impegnativo, durante il corso è possibile svolgere con loro un colloquio costante, non solo nelle esercitazioni ma anche nello svolgimento delle lezioni. È così possibile far emergere i diversi gradi della formazione raggiunta e promuovere un livello universitario adeguato.

*Capacità*
Agli studenti viene così offerta concretamente la possibilità di saper inquadrare certi problemi 'globali' fra analisi, geometria e fisica matematica, e di studiarli con l'approccio metodologico appreso. Si intende incoraggiare gli studenti ad affrontare i problemi con apertura mentale senza limitarsi agli schemi che già conoscono, per cearsi propri procedimenti sulla base dell' esperienza maturata.

*Modalità di verifica delle capacità*
La verifica delle capacità avviene nel costante colloquio. Gli studenti che possono già essere chiamati a  collaborare al corso, durante le le lezioni e le esercitazioni, e naturalmente attraverso l'esame finale.

*Comportamenti*
Il corso richiede impegno, vivo interesse, curiosità e anche il ricorso a una certa 'creatività matematica'. Gli studenti che lo scelgono sono già ben motivati.

*Modalità di verifica dei comportamenti*
La verifica si svolge naturalmente durante il corso, nel quale viene incoraggiato un costante colloquio, e ovviamente durante l'esame.

### Prerequisiti (conoscenze iniziali)
E` necessario aver assimilato le nozioni di Analisi Matematica fornite nei corsi dei primi due anni e le collegate nozioni elementari di algebra lineare e di topologia elementare.

### Indicazioni metodologiche
Viene incoraggiata la analisi critica e la ricerca di strutture logiche unificanti, nello studio del filo logico, progressivamente emerso nel Novecento, che collega numerosi importanti problemi di analisi non lineare di tipo globale.

### Programma (contenuti dell'insegnamento)

Il corso verte su alcuni fondamentali teoremi "globali" fra analisi e geometria, particolarmente importanti nella moderna "analisi non lineare". Il "grado" è lo strumento matematico che permette di affrontare questi teoremi e molti problemi "non lineari", inserendoli in una struttura logica unitaria. Problemi di questo tipo saranno effettivamente affrontati, comprese alcune "applicazioni" (facoltative) di tipo fisico-matematico collegate ai grandi "principii variazionali" esistenti in natura.
Per coloro che vogliono farsi una idea più concreta del corso vediamo ora qualcuno dei concetti e dei problemi presentati nel programma, per mostrare come essi vengono inseriti **in una stessa struttura logico matematica.**
**- Definizione del grado modulo 2 e studio delle sue proprietà.**
- Teorema Se A è un sottoinsieme aperto e limitato di RN e F è una mappa continua della chiusura di A in RN tale che F(x) = x per ogni x del bordo di A, allora F(A) contiene A.
- Teorema del punto fisso di Brouwer (L. E. J. Brouwer 1881 - 1966):
Se K è uno spazio topologico compatto omeomorfo ad una palla chiusa in RN e se F è una applicazione continua di K in sé, allora esiste x in K tale che F(x) = x.
- Teorema Se A è un sottoinsieme aperto e limitato di RN, il bordo di A non è contrattile in sé.
**- Definizione del grado come intero relativo e studio delle sue proprietà.**
- Teorema (Autovalori non lineari - 1): Se N è dispari allora per ogni mappa continua della sfera S di RN in RN esistono x in S e a in R tale che F(x) = a x.
Per esempio: Una palla di pelouche non è "pettinabile".
- Teorema di Borsuk-Ulam (K. Borsuk, 1905 - 1982; S. Ulam, 1909 - 1984)
Se A è un sottoinsieme aperto di RN, che contenga l'origine e sia limitato e simmetrico rispetto ad essa, e se F è una mappa continua del bordo di A in un sottospazio proprio di RN, allora esiste un punto x del bordo di A tale che F(x) = F(-x).
Per esempio: se si schiaccia un pallone esistono due sui punti esattamente opposti che finiscono nello stesso punto.
**- Elementi basilari del Calcolo della Variazioni non lineare, e alcuni teoremi tipici,** fra i quali:
- Il teorema della sella e il teorema di linking
- Alcuni invarianti topologici nel Calcolo delle Variazioni non lineare. In particolare il 'genere' e la 'categoria' di Lusternik e Schnirelman. Alcune conseguenze, fra le quali:
- Teorema (Autovalori non lineari - 2): Se F è una mappa continua e dispari definita sulla sfera S di RN, che sia gradiente di una funzione reale e 'pari' f , esistono x1, x2, ... xN in S e a1, ... aN in R tali che F(xi) = ai xi. (Con la stessa struttura logica del 'genere' viene mostrato un enunciato ben più generale.)
- A seconda delle esigenze didattiche emerse nel corso potrà essere introdotta anche la teoria generale dell'indice, con un cenno particolare all'indice di tipo S^1.
**Il programma prevede infine che ogni studente possa scegliere per il proprioprogramma di esame uno dei due argomenti:**
**1 - La proprieta moltiplicativa del grado e alcuni suoi sviluppi,** fra i quali:
- Teorema della applicazione aperta: se F è una applicazione iniettiva e continua dell'insieme aperto A in RN a valori in RN allora F manda aperti in aperti.
- Teorema di Jordan in RN (versione di Jean Leray) Due compatti omeomofi, K e L, in RN dividono lo spazio nello stesso numero, finito o no, di componenti connesse limitate.
In particolare se K è la sfera, allora RN \ L ha due e due sole componenti connesse, una limitata e l'altra no.
**2 - Esempi elementari nello studio dell'equazione della dinamica**, riguardo alle traiettorie di un punto materiale in un campo conservativo.
Questi risultati vengono inquadrati e ottenuti nell'ambito del Calcolo delle Variazioni non lineare.

## Bibliografia e materiale didattico

Testo consigliato: durante il corso vengono messe a disposizione le dispense del corso, che ogni anno vengono aggiornate e seconda del programma svolto.
Testi utili per ulteriori prospettive in "Analisi non lineare":
- Jacob T. Schwartz, "Nonlinear Functional Analysis", Gordon and Breach
- Michael Struwe, "Variational Methods", Springer
- Jean Mawhin, Michel Willem, "Critical Point Theory and Hamilton Systems", Springer-Verlag
- Ladyzhenskaya Ural'tseva, "Linear and Quasilinear Elliptic Equations", Academic Press (è un libro degli anni '60 ma molto istruttivo per chi volesse constatare la forza dei metodi topologici nello studio dei problemi dierenziali non lineari)

## Indicazioni per non frequentanti

Le dispense del corso sono scritte con un marcato scopo didattico, cercando di fare qualche cenno ai "significati" degli argomenti in una prospettiva generale. Ma chi non potesse frequentare regolarmente il corso è vivamente consigliato di rivolgersi di frequente al titolare per avere, oltre alle eventuali spiegazioni tecniche, una verifica della propria padronanza del senso e della prospettiva del suo studio.

## Modalità d'esame

L'esame è costituito dalla prova orale, la quale consiste in una approfondita discussione nell'ambito degli argomenti considerati nel corso, volta a sondare la comprensione della materia e la acquisita maturazione scientifica.
In particolare in questa occasione gli studenti sono incoraggiati a esplicare la propria autonomia di riflessione e di ricerca, al cui sviluppo è orientato tutto lo svolgimento del corso.

*Ultimo aggiornamento 25/01/2023 23:23*