



## UNIVERSITÀ DI PISA SPAZI DI SOBOLEV

---

### BOZHIDAR VELICHKOV

Anno accademico	2022/23
CdS	MATEMATICA
Codice	794AA
CFU	6

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
SPAZI DI SOBOLEV	MAT/05	LEZIONI	48	BOZHIDAR VELICHKOV

#### Obiettivi di apprendimento

##### *Conoscenze*

La teoria degli spazi di Sobolev e le sue applicazioni alla teoria delle equazioni alle derivate parziali ed al calcolo delle variazioni.

##### *Modalità di verifica delle conoscenze*

Esame orale

##### *Capacità*

Applicare la teoria degli spazi di Sobolev a problemi variazionali ed EDP per ottenere l'esistenza di minimi e di soluzioni deboli. Dedurre le principali proprietà delle funzioni di Sobolev partendo dalle definizioni base.

##### *Modalità di verifica delle capacità*

Esame orale

#### Prerequisiti (conoscenze iniziali)

Analisi 1, 2, 3. In particolare: integrazione su superfici regolari ed integrazione per parti (teorema della divergenza) in  $\mathbb{R}^n$ ; integrazione secondo Lebesgue; spazi  $L^2$  (e più in generale spazi  $L^p$ ); densità delle funzioni regolari negli spazi  $L^p$ ; proprietà base della convoluzione; convergenza forte negli spazi  $L^p$ ; convergenza Lebesgue quasi-ovunque.

#### Programma (contenuti dell'insegnamento)

- Convergenza debole negli spazi  $L^p$  con  $p > 1$ . Le successioni limitate sono debolmente compatte. Un sottospazio lineare è chiuso rispetto alla topologia debole se e solo se lo è rispetto a quella forte. Convergenza debole e semicontinuità della norma  $L^p$ .
- Derivate deboli e definizione di  $W^{1,p}$  in dimensione  $N$ . Completezza degli spazi  $W^{1,p}$ . Somma, prodotto, inf e sup di funzioni di Sobolev. Convoluzione con funzioni regolari. Approssimazione di una funzione Sobolev con funzioni regolari. Teoremi di estensione. Disuguaglianza di Poincaré. Compattezza delle successioni limitate: Teorema di Rellich. Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev. Lemma di Morrey. Continuità delle funzioni di  $W^{1,p}$  per  $p$  abbastanza grande. Spazi  $W^{1,p}_0$ .
- Formulazione debole di problemi ellittici in domini limitati. Principi di confronto. Limitatezza delle soluzioni. Teorema della regolarità ellittica. Funzioni armoniche e funzioni subarmoniche. Teorema della media. Regolarità delle funzioni armoniche. Continuità fino al bordo delle soluzioni. Approssimazione delle funzioni in  $W^{1,2}_0$  con soluzioni di problemi ellittici. Definizioni equivalenti degli spazi  $W^{1,2}_0$ . Principio di concentrazione-compattità. Problemi variazionali in domini illimitati.
- Capacità. Insiemi di capacità nulla. Unione e intersezione di insiemi di capacità nulla. Teorema di Besicovitch. Definizione di una funzione di Sobolev a meno di un insieme di capacità nulla. Capacità e misura di Hausdorff. Traccia di una funzione di Sobolev su un'insieme di misura di Hausdorff positiva. Convergenza cap-quasi-ovunque. Una formulazione equivalente di  $W^{1,2}_0$ . Teoremi della traccia.



## UNIVERSITÀ DI PISA

---

Teorema di Gagliardo.

- Operatori compatti su  $L^2$ . Autovalori e autofunzioni del Laplaciano su un dominio limitato. Equazione del calore su domini limitati. Spazi di Sobolev sulla sfera. Spazi  $H^{1/2}$  sulla sfera. Armoniche sferiche e funzioni armoniche omogenee.

### Bibliografia e materiale didattico

Le dispense del corso verranno caricate sul sito del corso (il link sarà disponibile sul <https://people.dm.unipi.it/velichkov/teaching.html>).

Libri di testo utili sono:

- H. Brezis; *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*; Springer.
- L.C. Evans, R.F. Gariepy; *Measure theory and fine properties of functions*; CRC Press.
- L.C. Evans; *Partial Differential Equations*; Graduate Studies in Mathematics.

### Modalità d'esame

Esame orale

### Pagina web del corso

<https://people.dm.unipi.it/velichkov/teaching.html>

Ultimo aggiornamento 11/09/2022 17:17