SPAZI DI SOBOLEV

BOZHIDAR VELICHKOV

Anno accademico	2022/23
CdS	MATEMATICA
Codice	794AA
CFU	6

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
SPAZI DI SOBOLEV	MAT/05	LEZIONI	48	BOZHIDAR VELICHKOV

Obiettivi di apprendimento

Conoscenze
La teoria degli spazi di Sobilev e le sue applicazioni alla teoria delle equazioni alle derivate parziali ed al calcolo delle variazioni.

Modalità di verifica delle conoscenze
Esame orale

Capacità
Applicare la teoria degli spazi di Sobolev a problemi variazionali ed EDP per ottenere l'esistenza di minimi e di soluzioni deboli. Dedurre le principali proprietà delle funzioni di Sobolev partendo dalle definizioni base.

Modalità di verifica delle capacità
Esame orale

Prerequisiti (conoscenze iniziali)
Analisi 1, 2, 3. In particolare: integrzione su superfici regiolari ed integrazione per parti (teorema della divergenza) in R^n; integrazione secondo Lebesgue; spazi L^2 (e più in generale spazi L^p); densità delle funzioni regolari negli spazi L^p; proprietà base della convoluzione; convergneza forte negli spazi L^p; convergenza Lebesgue quasi-ovunque.

Programma (contenuti dell'insegnamento)

- Convergenza debole negli spazi L^p con p>1. Le successioni limitate sono debolmente compatte. Un sottospazio lineare è chiuso rispetto alla topologia debole se e solo se lo è rispetto a quella forte. Convergenza debole e semicontinuità della norma L^p.
- Derivate deboli e definizione di W^{1,p} in dimensione N. Completezza degli spazi W^{1,p}. Somma, prodotto, inf e sup di funzioni di Sobolev. Convoluzione con funzioni regolari. Approssimazione di una funzione Sobolev con funzioni regolari. Teoremi di estensione. Disuguaglianza di Poincaré. Compattezza delle successioni limitate: Teorema di Rellich. Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev. Lemma di Morrey. Continuità delle funzioni di W^{1,p} per p abbastanza grande. Spazi W^{1,p}_0.
- Formulazione debole di problemi ellittici in domini limitati. Principi di confronto. Limitatezza delle soluzioni. Teorema della regolarità ellittica. Funzioni armoniche e funzioni subarmoniche. Teorema della media. Regolarità delle funzioni armoniche. Continuità fino al bordo delle soluzioni. Approssimazione delle funzioni in W^{1,2}_0 con soluzioni di problemi ellittici. Definizioni equivalenti degli spazi W^{1,2}_0. Principio di concentrazione-compattezza. Problemi variazionali in domini illimitati.
- Capacità. Insiemi di capacità nulla. Unione e intersezione di insiemi di capacità nulla. Teorema di Besicovitch. Definizione di una funzione di Sobolev a meno di un insieme di capacità nulla. Capacità e misura di Hausdorff. Traccia di una funzione di Sobolev su un'insieme di misura di Hausdorff positiva. Convergenza cap-quasi-ovunque. Una formulazione equivalente di W^{1,2}_0. Teoremi della traccia.

Teorema di Gagliardo.
- Operatori compatti su L^2. Autovalori e autofunzioni del Laplaciano su un dominio limitato. Equazione del calore su domini limitati. Spazi di Sobolev sulla sfera. Spazi H^{1/2} sulla sfera. Armoniche sferiche e funzioni armoniche omogenee.

Bibliografia e materiale didattico

Le dispense del corso verranno caricate sul sito del corso (il link sarà disponibile sul https://people.dm.unipi.it/velichkov/teaching.html).
Libri di testo utili sono:

- H. Brezis; *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*; Springer.
- L.C. Evans, R.F. Gariepy; *Measure theory and fine properties of functions*; CRC Press.
- L.C. Evans; *Partial Differential Equations*; Graduate Studies in Mathematics.

Modalità d'esame

Esame orale

Pagina web del corso

https://people.dm.unipi.it/velichkov/teaching.html

Ultimo aggiornamento 11/09/2022 17:17