UNIVERSITÀ DI PISA

TEORIA GEOMETRICA DELLA MISURA

VALENTINO MAGNANI

Anno accademico	2022/23
CdS	MATEMATICA
Codice	225AA
CFU	6

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
TEORIA GEOMETRICA DELLA MISURA/a	MAT/05	LEZIONI	42	VALENTINO MAGNANI

Obiettivi di apprendimento

Conoscenze
Lo studente potrà acquisire una buona conoscenza dei principali argomenti di Teoria Geometrica della Misura, comprendendone strumenti, obiettivi e sviluppi. I temi principali sono costituiti dalle proprietà fini di funzioni reali, proprietà delle misure di Hausdorff, le loro trasformazioni tramite mappe lipschitziane, gli insiemi frattali, gli insiemi rettificabili e quelli di perimetro finito. Una descrizione più diffusa è contenuta nel programma del corso.

Modalità di verifica delle conoscenze
La verifica delle conoscenze avviene tramite prova orale, che si tiene nell'esame finale. La chiarezza dell'esposizione, la conoscenza degli enunciati e le loro dimostrazioni sono gli elementi principali della valutazione.

Capacità
La padronanza degli strumenti offerti dal corso può consentire il proseguimento degli studi su temi di ricerca più recente, specialmente in riferimento agli argomenti trattati. Lo studente sarà anche in grado di fornire quei dettagli tecnici che non sono disponibili in trattazioni avanzate.

Modalità di verifica delle capacità
La verifica delle capacità acquisite avverrà nell'esame finale.

Comportamenti
Lo studente potrà sviluppare uno speciale interesse per le tematiche che riguardano versioni "nonsmooth" della geometria differenziale classica.

Prerequisiti (conoscenze iniziali)
Si richiede la conoscenza dei corsi di Analisi del primo biennio, la teoria della misura di Lebesgue e le nozioni essenziali di Teoria della Misura. Saranno comunque richiamati tutti i risultati necessari, come la differenziabilità quasi ovunque delle funzioni monotone, le proprietà basilari delle misure astratte, misure boreliane e di Radon, l'integrazione astratta, il teorema di Radon-Nikodym, il teorema di Fubini, i teoremi di convergenza per successioni di funzioni misurabili e il teorema di rappresentazione di Riesz per funzionali su spazi di funzioni continue. Tutti i teoremi utilizzati avranno comunque delle precise referenze. Un corso di Analisi Reale contiene ampiamente i prerequisiti richiesti.

Corequisiti
Gli sviluppi del corso renderanno utile anche la conoscenza dei risultati essenziali su varietà differenziabili dello spazio euclideo. Quindi lo studente può facoltativamente frequentare anche un corso che tratti argomenti di geometria differenziale.

Prerequisiti per studi successivi
Gli argomenti del corso potrebbero estendersi al contesto dell'Analisi in Spazi Metrici, sviluppatasi dalla metà degli anni novanta.

Indicazioni metodologiche
Il corso è costituito da lezioni frontali, che saranno tenute tramite la redazione e proiezione di appunti su supporto informatico e alla lavagna. Se necessario o espressamente richiesto, le lezioni potranno tenersi anche in lingua inglese.

Programma (contenuti dell'insegnamento)

1. **Richiami sulle misure.** Misure, misure esterne e loro relazioni. Misure boreliane e misure di Radon. Misure vettoriali e loro variazione totale. Convergenza debole* di misure. Costruzione di Carathéodory, misura di Hausdorff e misura sferica.
2. **Teoremi di ricoprimento e differenziabilità di misure.** Teoremi di ricoprimento di Vitali, relazione di Vitali, teorema di ricoprimento di Besicovitch in spazi metrici direzionalmente limitati, differenziabilità di misure rispetto a una relazione di Vitali, teorema di differenziabilità di Lebesgue in spazi metrici doubling, differenziabilità rispetto a misure asintoticamente doubling(*).
3. **Frattali.** Insiemi di Cantor con parametro, frattali autosimili, varie costruzioni di frattali, calcolo della dimensione di Hausdorff di frattali, costruzione di Hutchinson.
4. **Misura di Hausdorff e misura di Lebesgue.** Disuguaglianza di Brunn-Minkowski, disuguaglianza isodiametrica e uguaglianza tra misura di Hausdorff e misura di Lebesgue.
5. **Proprietà fini di funzioni, approssimazione e differenziabilità.** Teoremi di Lusin e di Egorov. Teorema di Rademacher per funzioni di più variabili reali. Punti di densità di un insieme e unicità del differenziale. Nozioni di differenziabilità in spazi metrici(*). Spazi di Sobolev e funzioni a variazione limitata, teoremi di Meyers-Serrin e di Anzellotti-Giaquinta.
6. **Elementi di algebra multilineare.** Multivettori, prodotto esterno, mappe alternanti, dualità tra multivettori e mappe alternanti, prodotto scalare tra multivettori, prodotto esterno iterato di una mappa lineare e suo jacobiano rispetto ad un prodotto scalare.
7. **Calcoli di aree k-dimensionali e formula di coarea per mappe lipschitziane.** Teoremi di linearizzazione, trascurabilità dei valori singolari e formula dell'area per mappe lipschitziane tra spazi euclidei. Disuguaglianza di Eilenberg-Federer. Formule di area e di coarea per mappe vettoriali lipschitziane di più variabili reali.
8. **Insiemi rettificabili.** Nozione di insieme rettificabile, spazi tangenti approssimati, misure tangenti, varie caratterizzazioni degli insiemi rettificabili.
9. **Insiemi a perimetro finito.** Contenuto di Minkowski e disuguaglianza isoperimetrica. Disuguaglianza di immersione di Sobolev per funzioni liscie e disuguaglianza isoperimetrica con costante ottimale. Insiemi a perimetro finito, loro proprietà, teorema della divergenza per insiemi a perimetro finito e corrispondenti disuguaglianze isoperimetriche. Frontiera ridotta e teorema di rettificabilità di De Giorgi.
10. **Cenni ad ulteriori sviluppi(*).** Nozione di corrente di De Rham, bordo e massa di una corrente e prime operazioni sulle correnti. Brevi cenni alle correnti metriche di De Giorgi, Ambrosio e Kirchheim e alla regolarità delle superfici minime.

Il simbolo (*) indica argomenti che possono essere ampliati con studi successivi.

Bibliografia e materiale didattico

[1] L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara, Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems, Oxford University Press, 2000.
[2] L. Ambrosio, P. Tilli, Topics on analysis in metric spaces, Oxford University Press, Oxford, 2004.
[3] Y. D. Burago, V. A. Zalgaller, Geometric inequalities, Grundlehren Math., Springer, Berlin, 1988.
[4] L. C. Evans and R. F. Gariepy, Measure theory and fine properties of functions, revised edition, CRC Press, Boca Raton, FL, 2015.
[5] K. Falconer, Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications, Wiley, 2003.
[6] H. Federer, Geometric measure theory, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.
[7] S. G. Krantz, H. R. Parks, Geometric Integration Theory, Birkhäuser, Boston, 2008
[8] P. Mattila, "Geometry of sets and measures in Euclidean spaces", Cambridge University Press, 1995
[9] L. Simon, Lectures on Geometric Measure Theory, Australian National University, Centre for Mathematical Analysis, 1984.
[10] W. Ziemer, "Weakly differentiable functions.Sobolev spaces and functions of bounded variation", Springer-Verlag, 1989

Modalità d'esame

L'esame è costituito da due parti. La prima è una prova orale su una selezione di argomenti del corso, che richiede la conoscenza di risultati, dimostrazioni ed il saper affrontare eventuali esercizi. La seconda parte è in forma seminariale su un argomento scelto dallo studente. Il seminario svilupperà un argomento interamente nuovo o solo parzialmente trattato nel corso.

Ultimo aggiornamento 14/09/2022 16:26