UNIVERSITÀ DI PISA

ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA

PIETRO MAJER

Academic year	2022/23
Course	MATEMATICA
Code	770AA
Credits	11

Modules	Area	Type	Hours	Teacher(s)
ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA	MAT/05	LEZIONI	72	PIETRO MAJER

Programma (contenuti dell'insegnamento)

1. Ricapitolazione della teoria degli spazi di Hilbert. Prodotti scalari su spazi vettoriali reali. Disuguaglianza di Schwarz. Norma associata a un prodotto. Identità del parallelogrammo. Spazi di Hilbert. Esistenza e unicità del punto di minima norma in un convesso chiuso di uno spazio di Hilbert. Proiettore metrico associato a un convesso chiuso. Ortogonalità. Ortogonale di un sottospazio di uno spazio di Hilbert. Il proiettore metrico su un sottospazio chiuso è un operatore lineare, limitato, simmetrico, idempotente. Forme hermitiane e spazi di Hilbert complessi. Spazi di Hilbert complessi come spazi di Hilbert reali con un operatore radice di -identità. Decomposizione di uno spazio di Hilbert in somma diretta ortogonale di un sottospazio e del suo ortogonale. Forma lineare associata a un vettore tramite prodotto scalare. Teorema di F.Riesz: il duale di uno spazio di Hilbert è antilinearmente e isometricamente isomorfo allo spazio stesso. Sistemi ortonormali. Le proprietà di completezza e massimalità per sistemi ortonormali sono equivalenti. Identità di Parseval. Caratterizzazione delle basi hilbertiane. Coefficienti di Fourier rispetto a un sistema ortonormale. Disuguaglianza di Bessel. Identità di polarizzazione. Ogni spazio di Hilbert è hilbertianamente isomorfo a uno spazio ?2(A). Separabilità. Due basi hilbertiane in uno spazio di Hilbert hanno la stessa cardinalità. Dimensione hilbertiana. Uno spazio di Hilbert è separabile se e solo se ha dimensione hilbertiana finita o numerabile. Applicazioni alla teoria della misura: dimostrazione hilbertiana del teorema di Radon-Nikodym. Processo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Polinomi ortogonali.

   Ricapitolazione sulla completezza: uno spazio normato X è completo se e solo se in X le serie normalmente convergenti convergono. Completezza di spazi classici: funzioni limitate, funzioni continue e limitate, spazi Lp(X,?), lo spazio degli operatori limitati fra spazi di Banach. Completamento metrico ed estensione per densità di funzioni uniformemente continue. Teorema di Hahn-Banach. Estensione di funzionali lineari con ugual norma. Caso complesso. Inclusione isometrica di uno spazio normato nel suo biduale. Trasposto di un operatore. Isometrie naturali Y*?X*/Y? e (X/Y)*?Y?. Funzionale di Minkowski di un convesso. Duali di spazi di Banach. Forme geometriche del teorema di Hahn-Banach: teoremi di separazione di convessi. Intorni dell'origine in uno spazio vettoriale topologico. Spazi vettoriali topologici localmente convessi; topologia associata a una famiglia di seminorme. Topologia iniziale associata a una famiglia di mappe. Prodotti. Topologia iniziale associata a una famiglia di mappe. Topologia debole ?(X,X*) su X e topologia debole*, ?(X*,X) su X*. Spazi riflessivi. Insiemi limitati in uno spazio vettoriale topologico. Caratterizzazione sequenziale dei limitati. Teorema di Banach-Steinhaus. Continuità di applicazioni bilineari. Successioni di operatori fra spazi di Banach; convergenza forte (puntuale). I limitati deboli di X e i limitati deboli* di X* sono anche limitati nelle rispettive norme. Teorema della mappa aperta per operatori lineari. Norme di Banach confrontabili su uno spazio vettoriale sono equivalenti. Teorema del grafico chiuso. Surgettività per operatori lineari su spazi di Banach. Sottoinsiemi ?-convessi in uno spazio di Banach. Lemma di iterazione per la surgettività lineare. Applicazioni: teorema di estensione di Tietze-Dugundji, teorema di sollevamento per mappe a valori in spazi di Banach.

   Operatori invertibili, inversi sinistri, inversi destri, surgettivi, iniettivi con immagine chiusa, sono insiemi aperti nello spazio degli operatori. Annullatore di A?X e pre-annullatore di B?X*. T è iniettivo se e solo se T* ha immagine w* densa. T* è iniettivo se e solo se T ha immagine densa. Teorema del rango chiuso. T (risp. T*) è surgettivo se e solo se T* (risp. T) è iniettivo con immagine chiusa. Polare di un insieme. Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki. Uno SVT su ? (? o ?) è localmente compatto se e solo ha dimensione finita n, nel qual caso è isomorfo allo spazio ?n. Sottospazi di dimensione finita di uno SVT (T0) sono chiusi e se lo spazio è LC sono addendi diretti. Sottospazi chiusi di codimensione finita di uno SVTLC sono addendi diretti. Filtri. Teorema di Tychonov. Punti estremali. Lista di oggetti riconducibili alla nozione di punto estremale. Sottoinsiemi estremali. Teorema di Krein-Milman. Enunciato del teorema di Choquet ed esempi di applicazioni di esso. Rappresentazione dell'inclusione nel biduale per sottospazi e per quozienti di uno spazio di Banach X in termini di bi-annullatore. X è riflessivo se e solo se X* è riflessivo. Sottospazi chiusi e quozienti di spazi riflessivi sono riflessivi. Nozione di insieme polare, prepolare, bipolare. La palla unitaria di un Banach è w*-densa nella palla unitaria chiusa del biduale (Goldstine). X è riflessivo se e solo se la sua palla unitaria chiusa è w-compatta (Kakutani). Ogni spazio di Banach è isometricamente e linearmente isomorfo a un sottospazio chiuso di C(K) per uno spazio compatto K. Un sottospazio w*-chiuso Y di un duale X* è esso stesso isomorfo a un duale, nel qual caso anche il quoziente X*/Y è un duale. Una decomposizione in somma diretta di un duale X* in fattori w*-chiusi proviene da una decomposizione in somma diretta dello spazio. Per un operatore lineare L fra spazi di Banach è equivalente essere continuo forte-forte, forte-debole,

debole-debole.

L'inviluppo convesso chiuso di un compatto in un Banach è compatto (Mazur) ed è contenuto nell'inviluppo convesso chiuso di una successione infinitesima in norma (Dieudonné). La topologia bw* su X*, limite induttivo della topologia w* ristretta ai limitati di X*. Polare A° di un insieme A come palla unitaria chiusa della seminorma uniforme su A, ||·||?,A. Topologie polari su X*. Sul duale X* di uno spazio di Banach la topologia bw* coincide con la topologia delle norme uniformi sui compatti (Dieudonné). La topologia bw* su X* ha lo stesso duale topologico della w*, cioè le valutazioni sui punti di X (Dieudonné). Un convesso di X* è w* chiuso se e solo se ha traccia w* chiusa su tutte le palle chiuse centrate nell'origine (Krein-Šmulyan). Se X* è separabile anche X è separabile. Se X è separabile, la topologia debole* sui limitati di X* è metrizzabile; se X* è separabile, la topologia debole sui limitati di X è metrizzabile. Uno spazio di Banach X è separabile se e solo se la topologia debole* ?(X*,X) sulla palla unitaria unitaria di X* è metrizzabile. Il duale di uno spazio di Banach X è separabile se e solo se la topologia debole ?(X,X*) sulla palla unitaria unitaria di X è metrizzabile. Uno spazio di Banach è riflessivo e separabile se e solo se lo è il suo duale. Norme uniformemente convesse. Uno spazio di Banach uniformemente convesso è rilessivo (Milman-Pettis). Lo spazio c0 non è complementato in ??.

Operatori lineari compatti su spazi di Banach. Caratterizzazioni e proprietà. Esempi di operatori compatti. Un operatore T è compatto se e solo se T* è compatto (Schauder). L'insieme Lc(X) degli operatori compatti su X è un ideale bilatero chiuso di L(X). Se X è lo spazio di Hilbert di dimensione hilbertiana numerabile, Lc(X) è l'unico ideale bilatero chiuso proprio. Spettro di un operatore. Molteplicità algebrica e geometrica per autovalori di un operatore compatto. Teoria di Riesz-Schauder. Conclusione delle dimostrazioni. Risoluzione spettrale per un operatore compatto. Operatori (Hermitianamente) simmetrici su spazi di Hilbert. Forma quadratica associata. Quoziente di Rayleigh. Caratterizzazione variazionale degli autovettori e autovalori di un operatore simmetrico come punti critici e livelli critici del corrispondente quoziente di Rayleigh. Teoria spettrale per operatori compatti simmetrici su uno spazio di Hilbert. Diagonalizzazione. Caratterizzazione variazionale degli autovalori e formula di Courant-Fischer-Weyl. Restrizione di operatori autoaggiunti compatti a iperpiani chiusi: principio degli autovalori intervallati. Altre proprietà dello spettro di un operatore su uno spazio di Banach. Identità del risolvente, formula di Gelfand per il raggio spettrale. Teoria spettrale per operatori limitati autoaggiunti. Teorema della mappa spettrale. Calcolo funzionale continuo per operatori autoaggiunti limitati su uno spazio di Hilbert. Calcolo funzionale di Borel per operatori autoaggiunti limitati su uno spazio di Hilbert.

Spazi di funzioni regolari su aperti ???n. Gli spazi Cm(?) per 0 ? m ? ? sono spazi di Fréchet (localmente convessi metrizzabili e completi). I limitati di ?(?):=C?(?) sono relativamente compatti. Funzioni a supporto compatto. Lo spazio delle funzioni Cm a supporto compatto, Ccm(?). Lo spazio delle funzioni test ?(?). Limite induttivo di una sequenza di spazi vettoriali topologici Xn ? Xn+1. Proprietà universale. Il limite induttivo di spazi LC in SVT coincide col limite induttivo in SVTLC. Limiti induttivi stretti di SVT (secondo Dieudonné-Schwartz). Bornologia di un limite induttivo stretto. Lo spazio ?(?) è sequenzialmente completo e non metrizzabile. Ogni sottoinsieme limitato di ?(?) è relativamente compatto ed è contenuto in un ?K. Un'applicazione lineare L: ?(?)?Y a valori in uno SVT Y è continua se e solo se è sequenzialmente continua, e anche, se e solo se sono continue le sue restrizioni agli spazi ?K. Spazi LF (limiti induttivi stretti di una successione di sottospazi Fréchet). Partizioni dell'unità. Topologia LF dello spazio cc delle successioni definitivamente nulle, e dello spazio Cc(?), delle funzioni continue a supporto compatto. Costruzione di una famiglia di seminorme per ciascuno dei due spazi. Seminorme di Gårding-Lions per la topologia di LF spazio di ?(?). Il prodotto puntuale di funzioni su ?(?) è (topologicamente) continuo. Condizioni equivalenti per la continuità di forme lineari su ?(?). Distribuzioni. Distribuzioni di ordine finito. Inclusione L1loc(?) ? ?'(?). Derivate di una distribuzione. Rappresentazione di una distribuzione via integrazione di derivate con misure di Radon. Formula di Leibnitz per derivate di un prodotto. Le distribuzioni di ordine finito m su ? si estendono a forme lineari continue sullo spazio Com(?) e nella loro rappresentazione integrale intervengono solo derivate di ordine al più m. Le distribuzioni positive hanno ordine zero e sono perciò misure di Radon. Moltiplicazione di una distribuzione per una funzione f ? ?(?). La topologia debole ?(?'(?),?(?)) sullo spazio delle distribuzioni. Successioni di distribuzioni e convergenza. Carattere locale delle distribuzioni; restrizione; incollamento. La famiglia ?'(?) come fascio di SVTLC. Supporto di una distribuzione. Ogni distribuzione in ?'(?) a supporto compatto ha ordine finito e si estende per densità a un unico elemento di ?'(?), e ogni elemento di ?'(?) definisce per restrizione a ?(?) una distribuzione a supporto compatto. Relazioni fra il supporto di una distribuzione e le seminorme che la dominano. Esempi e controesempi. Caratterizzazione delle distribuzioni con supporto in un punto. Convoluzione di una funzione e di una distribuzione, una delle quali a supporto compatto. Altre proprietà dello spazio ?(?) derivanti dalla sua natura di LF-spazio: ogni LF-spazio è uno spazio botte e uno spazio bornologico.

Bibliografia e materiale didattico

- W.Rudin, Functional Analysis (cap.1-6)
- H.Brezis, Analyse Fonctionnelle (cap. 1-6)
- L.Hoermander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators (cap 2)

Ultimo aggiornamento 11/01/2023 15:56