UNIVERSITÀ DI PISA

SPAZI DI SOBOLEV

BOZHIDAR VELICHKOV

Anno accademico	2023/24
CdS	MATEMATICA
Codice	794AA
CFU	6

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
SPAZI DI SOBOLEV	MAT/05	LEZIONI	48	BOZHIDAR VELICHKOV

Obiettivi di apprendimento

Conoscenze
La teoria degli spazi di Sobilev e le sue applicazioni alla teoria delle equazioni alle derivate parziali ed al calcolo delle variazioni.

Modalità di verifica delle conoscenze
Esame orale

Capacità
Applicare la teoria degli spazi di Sobolev a problemi variazionali ed EDP per ottenere l'esistenza di minimi e di soluzioni deboli. Dedurre le principali proprietà delle funzioni di Sobolev partendo dalle definizioni base.

Modalità di verifica delle capacità
Esame orale

Prerequisiti (conoscenze iniziali)
Analisi 1, 2, 3. In particolare: integrzione su superfici regiolari ed integrazione per parti (teorema della divergenza) in R^n; integrazione secondo Lebesgue; spazi L^2 (e più in generale spazi L^p); densità delle funzioni regolari negli spazi L^p; proprietà base della convoluzione; convergneza forte negli spazi L^p; convergenza Lebesgue quasi-ovunque.

Programma (contenuti dell'insegnamento)
Capitolo 1. Gli spazi Lp come spazi di Banach.
• Operatori lineari continui su uno spazio di Banach.
• Teorema di Hahn-Banach.
• Norma di un operatore lineare continuo.
• Le nozioni di spazio duale e di convergenza debole in uno spazio di Bananch.
• Lo spazio duale di Lp nel caso p>1.
• La nozione di convergenza debole negli spazi Lp nel caso p > 1.
• Le successioni limitate (di funzioni in Lp) sono debolmente compatte.
• Le successioni debolmente convergenti (di funzioni in Lp) sono limitate.
• Semicontinuità della norma rispetto alla convergenza debole.
Capitolo 2. Spazi di Sobolev di funzioni di una variabile.
• Derivate deboli e definizione degli spazi W 1,p su un intervallo I ? R.
• Gli spazi W1,p(I) come spazi di Banach.
• Teorema fondamentale del calcolo integrale in W1,p(I).
• Approssimazione con funzioni regolari.
• Somma, prodotto, modulo, inf e sup di funzioni di Sobolev.
• Teoremi di estensione.
• Limitatezza delle funzioni di Sobolev.
• Funzioni di Sobolev su intervalli limitati e serie di Fourier.
• Funzioni di Sobolev su R e trasformata di Fourier.
• Applicazioni alla risoluzione di problemi ellittici e parabolici su intervalli.

Capitolo 3. Spazi di Sobolev di funzioni di più variabili.

- Derivate deboli e definizione degli spazi W1,p su insiemi aperti di Rd.
- Completezza degli spazi W 1,p .
- Gli spazi W1,p 0
- Approssimazione con funzioni regolari.
- Teoremi di estensione.
- Disuguaglianza di Poincaré.
- Disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger.
- Teorema di Rellich.
- Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.
- Immersioni di Sobolev nel caso critico p = d.
- Lemma di Morrey e immersioni di Sobolev nel caso p > d.
- Traccia di una funzione di Sobolev sul bordo di un dominio regolare.
- Teorema di Gagliardo e disuguaglianze integrali di Hardy e Minkowski.
- Formulazione debole di problemi ellittici.
- Operatori compatti su spazi di Hilbert. Teorema spettrale.
- Autovalori e autofunzioni del Laplaciano di Dirichlet.
- Equazione del calore su domini limitati.

Bibliografia e materiale didattico

Le dispense del corso verranno caricate sul sito del corso (il link sarà disponibile sul https://people.dm.unipi.it/velichkov/teaching.html).
Libri di testo utili sono:

- H. Brezis; *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*; Springer.
- L.C. Evans, R.F. Gariepy; *Measure theory and fine properties of functions*; CRC Press.
- L.C. Evans; *Partial Differential Equations*; Graduate Studies in Mathematics.

Modalità d'esame

Esame orale

Pagina web del corso

https://people.dm.unipi.it/velichkov/spazi-di-sobolev-23-24.html

Ultimo aggiornamento 15/09/2023 21:07