



UNIVERSITÀ DI PISA

SPAZI DI SOBOLEV

BOZHIDAR VELICHKOV

Anno accademico	2023/24
CdS	MATEMATICA
Codice	794AA
CFU	6

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
SPAZI DI SOBOLEV	MAT/05	LEZIONI	48	BOZHIDAR VELICHKOV

Obiettivi di apprendimento

Conoscenze

La teoria degli spazi di Sobolev e le sue applicazioni alla teoria delle equazioni alle derivate parziali ed al calcolo delle variazioni.

Modalità di verifica delle conoscenze

Esame orale

Capacità

Applicare la teoria degli spazi di Sobolev a problemi variazionali ed EDP per ottenere l'esistenza di minimi e di soluzioni deboli. Dedurre le principali proprietà delle funzioni di Sobolev partendo dalle definizioni base.

Modalità di verifica delle capacità

Esame orale

Prerequisiti (conoscenze iniziali)

Analisi 1, 2, 3. In particolare: integrazione su superfici regolari ed integrazione per parti (teorema della divergenza) in \mathbb{R}^n ; integrazione secondo Lebesgue; spazi L^2 (e più in generale spazi L^p); densità delle funzioni regolari negli spazi L^p ; proprietà base della convoluzione; convergenza forte negli spazi L^p ; convergenza Lebesgue quasi-ovunque.

Programma (contenuti dell'insegnamento)

Capitolo 1. Gli spazi L^p come spazi di Banach.

- Operatori lineari continui su uno spazio di Banach.
- Teorema di Hahn-Banach.
- Norma di un operatore lineare continuo.
- Le nozioni di spazio duale e di convergenza debole in uno spazio di Banach.
- Lo spazio duale di L^p nel caso $p > 1$.
- La nozione di convergenza debole negli spazi L^p nel caso $p > 1$.
- Le successioni limitate (di funzioni in L^p) sono debolmente compatte.
- Le successioni debolmente convergenti (di funzioni in L^p) sono limitate.
- Semicontinuità della norma rispetto alla convergenza debole.

Capitolo 2. Spazi di Sobolev di funzioni di una variabile.

- Derivate deboli e definizione degli spazi $W^{1,p}$ su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$.
- Gli spazi $W^{1,p}(I)$ come spazi di Banach.
- Teorema fondamentale del calcolo integrale in $W^{1,p}(I)$.
- Approssimazione con funzioni regolari.
- Somma, prodotto, modulo, inf e sup di funzioni di Sobolev.
- Teoremi di estensione.
- Limitatezza delle funzioni di Sobolev.
- Funzioni di Sobolev su intervalli limitati e serie di Fourier.
- Funzioni di Sobolev su \mathbb{R} e trasformata di Fourier.
- Applicazioni alla risoluzione di problemi ellittici e parabolici su intervalli.

Capitolo 3. Spazi di Sobolev di funzioni di più variabili.



UNIVERSITÀ DI PISA

- Derivate deboli e definizione degli spazi $W^{1,p}$ su insiemi aperti di \mathbb{R}^d .
- Completezza degli spazi $W^{1,p}$.
- Gli spazi $W^{1,p}$
- Approssimazione con funzioni regolari.
- Teoremi di estensione.
- Disuguaglianza di Poincaré.
- Disuguaglianza di Poincaré-Wirtinger.
- Teorema di Rellich.
- Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.
- Immersioni di Sobolev nel caso critico $p = d$.
- Lemma di Morrey e immersioni di Sobolev nel caso $p > d$.
- Traccia di una funzione di Sobolev sul bordo di un dominio regolare.
- Teorema di Gagliardo e disuguaglianze integrali di Hardy e Minkowski.
- Formulazione debole di problemi ellittici.
- Operatori compatti su spazi di Hilbert. Teorema spettrale.
- Autovalori e autofunzioni del Laplaciano di Dirichlet.
- Equazione del calore su domini limitati.

Bibliografia e materiale didattico

Le dispense del corso verranno caricate sul sito del corso (il link sarà disponibile sul <https://people.dm.unipi.it/velichkov/teaching.html>).

Libri di testo utili sono:

- H. Brezis; *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*; Springer.
- L.C. Evans, R.F. Gariepy; *Measure theory and fine properties of functions*; CRC Press.
- L.C. Evans; *Partial Differential Equations*; Graduate Studies in Mathematics.

Modalità d'esame

Esame orale

Pagina web del corso

<https://people.dm.unipi.it/velichkov/spazi-di-sobolev-23-24.html>

Ultimo aggiornamento 15/09/2023 21:07