



# UNIVERSITÀ DI PISA

---

## ISTITUZIONI DI PROBABILITÀ

### DARIO TREVISAN

Anno accademico	2023/24
CdS	MATEMATICA
Codice	773AA
CFU	11

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
ISTITUZIONI DI PROBABILITÀ	MAT/06	LEZIONI	72	FRANCESCO GROTTO DARIO TREVISAN

#### Obiettivi di apprendimento

##### *Conoscenze*

Lo studente al termine del corso avrà acquisito conoscenze di base di processi stocastici e calcolo stocastico, in particolare processi Gaussiani e di Markov, processo di Poisson e moto Browniano, martingale, integrale stocastico, formula di Ito e cenni di equazioni differenziali stocastiche.

##### *Modalità di verifica delle conoscenze*

Lo studente sarà valutato riguardo la sua abilità di risolvere esercizi su processi stocastici e calcolo stocastico, di formulare i risultati più importanti del corso e saperli dimostrare, di discutere i concetti principali esaminati durante le lezioni.

##### *Capacità*

Al termine del corso lo studente sarà in grado di comprendere argomenti avanzati di probabilità e analisi stocastica e argomenti di matematica applicata dove l'analisi stocastica è strumento essenziale. Lo studente sarà inoltre in grado di impostare e risolvere semplici problemi relativi a tali argomenti.

##### *Modalità di verifica delle capacità*

Nella prova scritta sarà verificata la capacità dello studente di risolvere semplici problemi. Nella prova orale sarà verificata la capacità di comprensione e di elaborazione degli argomenti analizzati.

##### *Comportamenti*

Il corso permetterà di affrontare problemi complessi di natura probabilistica.

##### *Modalità di verifica dei comportamenti*

Nel corso degli esami agli studenti sarà richiesto di suggerire soluzioni a problemi e a fornire esempi dei concetti principali del corso.

##### *Prerequisiti (conoscenze iniziali)*

Lo studente deve avere padronanza sia degli argomenti di base della probabilità (probabilità, variabili aleatorie, etc), sia di argomenti più avanzati quali teoremi limite, teoria della misura applicata alla probabilità.

##### *Indicazioni metodologiche*

Il corso prevede lezioni frontali sia per la parte teorica che per la parte di esercizi. La frequenza è consigliata. Ci si aspetta che lo studente frequenti le lezioni e a questo affianchi un tempo sufficiente per lo studio individuale.

##### *Programma (contenuti dell'insegnamento)*

*Introduzione ai Processi Stocastici*. Nozioni di base sui processi stocastici. Filtrazioni, processi adattati, progressiva misurabilità, tempi di arresto. Costruzione di processi: teorema di estensione di Kolmogorov. Esempi: processi gaussiani. Richiami e approfondimenti sulle probabilità condizionali e sulla speranza condizionale. Definizione di proprietà di Markov, esempi, riformulazioni e criteri.

*Elementi di teoria delle martingale*. Definizioni di martingala, super e sub-martingala. Tempi d'arresto. Martingale tempo discreto: teoremi d'arresto, disuguaglianze di Doob, risultati di convergenza. Decomposizione di Doob-Meyer. Martingale a tempo continuo: generalizzazione di alcuni dei risultati precedenti. Variazione quadratica, semimartingale.



## UNIVERSITÀ DI PISA

*Moto Browniano e processo di Poisson.* Richiami sul moto Browniano, cenni sulle costruzioni, proprietà principali, regolarità delle traiettorie, proprietà di Markov, principio di riflessione, zeri del moto Browniano, moto Browniano e equazioni alle derivate parziali. Richiami sul processo di Poisson.

*Integrale stocastico secondo It?* Costruzione dell'integrale stocastico nel caso del moto Browniano e di processi adattati di quadrato integrabile. Proprietà dell'integrale. Generalizzazione a processi adattati a quadrato non integrabile. Applicazione dei risultati sulle martingale. Cenni sull'integrale di Stratonovich e sull'integrale rispetto a processi di Poisson.

*Formula di It?* Formula di It? Applicazioni: caratterizzazione di Lévy del moto Browniano, teorema di Girsanov, proprietà di rappresentazione delle martingale, moto Browniano e equazioni alle derivate parziali.

*Equazioni differenziali stocastiche.* Nozioni di esistenza ed unicità. Equazioni con rumore additivo. Teorema di esistenza ed unicità nel caso generale con coefficienti Lipschitz. Teoremi di esistenza di soluzioni deboli con ipotesi più deboli sui coefficienti. Legami tra equazioni differenziali stocastiche ed equazione di Fokker-Planck, di Kolmogorov, problema di Dirichlet.

### Bibliografia e materiale didattico

- Revuz, Daniel, and Marc Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*. Vol. 293. Springer Science & Business Media, 2013.
- Paolo Baldi, *Stochastic Calculus, an introduction through theory and exercises*, Springer, 2017.
- Richard Durrett, *Stochastic calculus. A practical introduction*, Probability and Stochastics Series, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
- eventuali note dei docenti.

### Modalità d'esame

L'esame è composto da una prova scritta e una prova orale. La prova scritta può essere eventualmente rimpiazzata dalle prove intermedie svolte durante il corso.

La prova scritta consiste nella risoluzione di 2-3 problemi, sviluppati su più quesiti, in forma dimostrativa.

La prova orale consiste in un colloquio che prevede tipicamente tre domande, volte a verificare la conoscenza dei risultati illustrati nel corso e delle loro dimostrazioni, dei concetti e delle definizioni principali, e la padronanza di tali concetti attraverso esempi illustrativi.

### Altri riferimenti web

<http://people.dm.unipi.it/trevisan/didattica.html>

Ultimo aggiornamento 20/08/2023 18:38