



# UNIVERSITÀ DI PISA

## ANALISI MATEMATICA

---

### ILARIA DEL CORSO

Anno accademico	2023/24
CdS	INGEGNERIA EDILE-ARCHITETTURA
Codice	679AA
CFU	12

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
ANALISI MATEMATICA	MAT/05	LEZIONI	120	ILARIA DEL CORSO PIETRO MAJER CYRILL MURATOV EVGENY STEPANOV

### Obiettivi di apprendimento

#### *Conoscenze*

Gli studenti che superano l'esame avranno una solida conoscenza del calcolo differenziale e integrale di funzioni reali di una o più variabili. Saranno in grado di valutare la convergenza di serie e integrali impropri e di risolvere equazioni differenziali lineari di primo e secondo ordine.

#### *Modalità di verifica delle conoscenze*

Esame scritto e orale.

L'esame scritto consiste nella soluzione di esercizi su studio di funzione e problemi di massimo e minimo; calcolo di limiti e integrali; studio di serie numeriche; risoluzione di equazioni differenziali; problemi sui campi di vettori.

La prova orale richiede che lo studente dimostri anche di aver compreso e assimilato definizioni, enunciati e dimostrazioni presentati nel corso.

#### *Capacità*

Gli studenti che superano l'esame avranno la capacità di usare i metodi dell'analisi classica in una e in più variabili e di applicarla a situazioni concrete. Lo studio dell'analisi matematica darà allo studente gli strumenti e metodo di lavoro necessari ad affrontare lo studio delle altre materie scientifiche.

Tra le finalità del corso c'è quella di stimolare la fantasia e l'apertura mentale a cercare soluzioni rigorose ma non scontate.

#### *Modalità di verifica delle capacità*

Esame scritto e orale

L'esame scritto contiene quesiti di vario tipo tra i quali una domanda non standard volta a valutare le capacità acquisite.

La prova orale richiede, tra le altre cose, che lo studente sappia fornire esempi di situazioni specifiche.

#### *Comportamenti*

È consigliato seguire le lezioni ed esercitarsi sugli esercizi proposti in classe o indicati sulla pagina web. Il corso prevede sessioni di esercitazioni di auto-verifica che si svolgeranno in aula: gli studenti sono invitati ad usare questi momenti per fare il punto sulla propria preparazione e, eventualmente, colmare poi le lacune evidenziate, avvalendosi anche dei ricevimenti studenti.

#### *Modalità di verifica dei comportamenti*

Nessuna.

#### *Prerequisiti (conoscenze iniziali)*

Matematica della scuola superiore: Algebra di base: polinomi, equazioni e disequazioni. Teoria elementare degli insiemi e delle funzioni. Proposizioni e connettivi logici. Funzioni elementari. Basi di trigonometria.

#### *Indicazioni metodologiche*

Il corso consiste in 144 ore di lezioni frontali divise in 2 semestri. Il modo di apprendimento consigliato consiste in:

- seguire attivamente le lezioni
- partecipare agli incontri di approfondimento e discussione



### Programma (contenuti dell'insegnamento)

**PRIMO SEMESTRE:** Vocabolario della teoria degli insiemi e della logica. Proprietà delle proposizioni e dei connettivi logici. Implicazioni. I predicati e i quantificatori. Negazione di una proposizione. Le dimostrazioni per assurdo. Significato e proprietà dei simboli della teoria degli insiemi: appartenenza, contenuto, intersezione, unione e differenza. Il principio di induzione. Il principio di induzione per i predicati (dim.). Il fattoriale ed i coefficienti binomiali. Cenni di calcolo combinatorio. I numeri reali. I numeri interi, razionali e reali. Esistenza degli irrazionali: l'irrazionalità di radice di 2. Gli assiomi algebrici sui numeri reali. Le operazioni sui reali e loro proprietà. Gli intervalli. L'assioma di continuità. L'assioma di Archimede. Insiemi limitati della retta reale. Definizione di massimo e di minimo. Definizione di maggiorante e di minorante. Definizione di estremo superiore e di estremo inferiore. Caratterizzazione dell'estremo superiore ed inferiore. Esistenza dell'estremo superiore ed inferiore nei reali (Dim.). Intervalli di numeri reali. Il valore assoluto e sue proprietà. La disuguaglianza triangolare (Dim.). Briciole di topologia. Definizione di intorno nella retta reale, intorni destri e sinistri. Definizione di punto di accumulazione. Le funzioni reali. Nomenclatura relativa alle funzioni reali: dominio, codominio, immagine, immagine inversa, iniettività, surgettività, funzione inversa, composizione, monotonia, restrizioni. Grafici delle funzioni elementari. Inverse delle funzioni trigonometriche. Definizione di funzione limitata superiormente ed inferiormente. Definizione di estremo superiore ed inferiore di una funzione. Massimi e minimi di funzioni. Caratterizzazione dell'estremo superiore ed inferiore di una funzione. Definizione di successione reale e di successione estratta. Funzioni continue. Definizione di funzione continua mediante  $\epsilon$ ,  $\delta$  e mediante gli intorni. (Dim.). Struttura lineare e algebra delle funzioni continue (continuità della somma, del prodotto, ecc., di funzioni continue) (Dim.). Teorema della permanenza del segno (Dim.). Continuità della composta di funzioni continue. Teorema degli zeri (Dim.). Teorema dei valori intermedi (Dim.). Teorema di Weierstrass. Enunciato del teorema sulla continuità dell'inversa di una funzione continua. Definizione di funzione uniformemente continua. Enunciato sull'uniforme continuità delle funzioni continue definite su un intervallo limitato e chiuso. Limiti di funzioni. Definizione generale di limite di funzione e sua esplicitazione nei vari casi (limite finito, infinito, ecc.). Operazioni con i limiti (Dim.). Casi di indeterminazione. Teorema della permanenza del segno (Dim.). Teorema di unicità del limite (Dim.). Teoremi del confronto e dei carabinieri (Dim.). Esempi di calcolo di alcuni limiti notevoli. Limite destro e sinistro. Teorema sui limiti di funzioni monotone (Dim.). Esempi di calcolo degli asintoti di una funzione. Il simbolo di Landau. L'algebra degli o-piccoli. Utilizzazione del simbolo di Landau per il calcolo dei limiti. Limiti di successioni. Definizione di limite di una successione. Definizione di sottosuccessione o successione estratta. Le successioni convergenti sono limitate (Dim.). Da ogni successione limitata si può estrarre una successione convergente. Teorema sui limiti di successioni monotone (Dim.). Il numero  $e$ . Le successioni definite per ricorrenza. Il calcolo differenziale. Definizione di differenziale e di derivata. Continuità delle funzioni derivabili (Dim.). Teoremi sulle operazioni con le derivate (Dim.). Derivazione di una funzione composta (Dim.). Derivazione dell'inversa di una funzione (Dim.). Definizione di massimo e di minimo relativo. Teorema sulla derivata in un punto di massimo o di minimo relativo (Dim.). Calcolo dei massimi e dei minimi assoluti di una funzione. Dimostrazione dei teoremi di Rolle e di Lagrange. Teorema sulla funzione che ha la derivata nulla su di un intervallo (Dim.). Il teorema sulle primitive (Dim.). Relazione tra segno della derivata e monotonia della funzione (Dim.). I teoremi dell'Hospital. Le derivate seconde. Definizione di funzione convessa. Legame tra derivata seconda e convessità di una funzione. Dimostrazione del teorema sulle derivate seconde nei punti stazionari. Legame tra retta tangente e funzione convessa. Studio del grafico di una funzione. La formula di Taylor con resto di Peano e di Lagrange. Metodo delle corde e delle tangenti per il calcolo delle radici di un'equazione algebrica. L'integrale. Definizione di integrale di Riemann. Proprietà delle funzioni integrabili (integrale della somma, ecc.). Integrabilità delle funzioni continue. Il teorema della media integrale (Dim.). Il teorema fondamentale del calcolo integrale (Dim.). Teorema di Torricelli (Dim.). Cambiamento di variabile negli integrali (integrale per sostituzione). Formula per l'integrazione per parti (Dim.). Calcolo degli integrali di funzioni razionali, di funzioni dipendenti da funzioni trigonometriche ed esponenziali, integrali di funzioni in cui compaiono radici. Calcolo di integrali in cui compaiono funzioni irrazionali quali il logaritmo, arcotangente, arcoseno, arcocoseno, o le funzioni iperboliche. Definizione di integrale generalizzato e sue proprietà. Serie numeriche. Definizione di serie convergente, divergente, indeterminata, assolutamente convergente. Alcune serie notevoli: la serie geometrica, la serie armonica. Condizione necessaria per la convergenza di una serie e che il termine generale sia infinitesimo (Dim.). Criterio della convergenza assoluta. Criterio di Leibniz per le serie a termini a segno alterno. Criteri di convergenza per le serie a termini positivi: criterio del confronto (Dim.), criterio del rapporto (Dim.), criterio della radice ennesima (Dim.), del confronto asintotico (Dim.). Criterio integrale per la convergenza di una serie (Dim.).

**SECONDO SEMESTRE:** 1) Topologia e metrica in  $\mathbb{R}^n$ : Punti esterni, interni e di frontiera di un sottoinsieme di uno spazio euclideo. Insiemi aperti e chiusi di uno spazio euclideo. Proprietà degli insiemi aperti e chiusi. Insiemi chiusi per successioni. Insiemi compatti. Compatti di  $\mathbb{R}^n$ . 2) Calcolo infinitesimale in più variabili: Definizione di limite di una funzione a più variabili (per successione e con il formalismo epsilon-delta). Continuità. Teoremi del calcolo che si trasportano a più variabili in maniera banale (proprietà dei limiti, permanenza del segno, confronto, continuità delle funzioni elementari). Teorema di Weierstrass in più variabili. Esercizi su limiti e continuità. Definizione di derivata parziale e derivata direzionale per una funzione di più variabili. Definizione di differenziale. Vettore gradiente. Rapporto tra continuità, differenziabilità e derivabilità. Teorema del differenziale totale. Differenziale di funzione di due variabili e piano tangente. Sviluppi di Taylor al primo ordine. Teorema di Fermat. Derivate parziali di ordine 2 o superiore. Teorema di Schwarz. Hessiano di una funzione. Classificazione dei punti critici. Rapporto tra punti critici e punti estremali. Sviluppi di Taylor al secondo ordine, concavità e convessità di una funzione di più variabili. Studio di funzione. Funzioni a valori vettoriali. Continuità e differenziabilità per funzioni a valori vettoriali, Matrice Jacobiana. Differenziale di funzione composta. Regola di derivazione a catena (chain rule), applicazione alla derivata di una funzione lungo una curva e al passaggio in coordinate polari. Ricerca di massimi e minimi vincolati. Varianti del teorema di Weierstrass su insiemi non compatti. 3) Calcolo differenziale su curve e superfici: Cenni di teoria delle curve. Sostegno di una curva, curve chiuse, semplici, regolari. Derivata di una funzione lungo una curva. Definizione di superficie parametrica. Piano tangente e vettore normale. Esempio della sfera. Parametrazioni di grafici di funzioni di due variabili e di superfici di rotazione. In una superficie definita come luogo di zeri di una funzione  $g$ , il gradiente di  $g$  è ortogonale alla superficie. Teorema del Dini o di funzione implicita in due variabili. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange in due o tre variabili. Teorema della funzione implicita in forma generale (senza dim) Teorema dei moltiplicatori di Lagrange in forma generale. 4) Calcolo integrale: Definizione di Integrale di Riemann. Integrazione su insiemi semplici. Proprietà degli integrali: monotonia e linearità rispetto all'integrando, additività e monotonia rispetto al dominio. Teorema della media. Teorema di derivazione sotto il segno di integrale. Integrali multipli: integrazione iterata. Volume dei solidi di rotazione. Cambio di variabili e invertibilità locale e globale di funzioni. Teorema di invertibilità locale (senza dimostrazione) Cambio di variabile negli integrali doppi e tripli. 5) Calcolo integrale su curve e superfici: Lunghezza di una curva. Definizione di integrale curvilineo. Invarianza



## UNIVERSITÀ DI PISA

dell'integrale per cambio di parametrizzazione Definizione di area di una superficie. Area di una superficie parametrizzata come grafico e di superfici di rotazione. Definizione di integrale di superficie. Rapporto tra integrali di superficie e integrale doppi. 6) Teoria dei campi: Definizione di campo vettoriale e di lavoro di un campo vettoriale lungo un cammino. Campi conservativi e potenziale di un campo. Lavoro in un campo conservativo. Operatori differenziali su campi di vettori: rotore e divergenza. Campi irrotazionali. Insiemi connessi e semplicemente connessi. Campi irrotazionali su insiemi semplicemente connessi. Ricerca dei potenziali per un campo. Criteri per capire se un campo irrotazionale è anche conservativo. Teorema di Gauss Green per campi irrotazionali. Teorema di Gauss Green. Superfici orientabili e orientazione di una superficie e del suo bordo. Teorema di Stokes. Rapporto tra teorema di Stokes e teorema di Gauss-Green. Flusso di un campo attraverso una superficie. Teorema della divergenza o di Gauss. 7) Equazioni differenziali: definizione e primi esempi. Teorema di esistenza e unicità locale. Equazioni lineari omogenee e non omogenee. Equazioni lineari di ordine 2 a coefficienti costanti. Equazioni lineari a coefficienti costanti con risonanza. Equazioni lineari del primo ordine a coefficienti non costanti: formula risolutiva. Equazioni a variabili separabili.

### Bibliografia e materiale didattico

Emilio Acerbi, Giuseppe Buttazzo: Analisi matematica ABC. 1-Funzioni di una variabile.  
Bramanti Pagani Salsa, Analisi I  
R. Adams, Calcolo Differenziale 2  
Bramanti, Pagani Salsa, Analisi II

### Indicazioni per non frequentanti

Consultare la pagina web del corso dove potete trovare il registro delle lezioni (che viene aggiornato regolarmente) il materiale didattico e i compiti degli appelli precedenti.

### Modalità d'esame

Esame scritto ed eventualmente esame orale

Per accedere alla prova orale occorre aver superato la prova scritta. L'esame scritto consiste nella soluzione di esercizi su studio di funzione e problemi di massimo e minimo; calcolo di limiti e integrali; studio di serie numeriche; risoluzione di equazioni differenziali; problemi sui campi di vettori.

La prova orale richiede che lo studente dimostri anche di aver compreso e assimilato definizioni, enunciati e dimostrazioni presentati nel corso e che lo studente sappia fornire esempi di situazioni specifiche.

La prova scritta influisce sul voto finale per il 70% e la prova orale per il 30%.

Valutazione delle prove: l'esame scritto incide per il 70% e l'esame orale per il 30% sul voto finale.

L'esame scritto è composto da vari quesiti, ognuno dei quali riporta a fianco il relativo punteggio.

### Altri riferimenti web

<https://elearn.ing.unipi.it/course/view.php?id=820>

<https://elearn.ing.unipi.it/course/view.php?id=971>

Ultimo aggiornamento 21/02/2024 19:34