



# UNIVERSITÀ DI PISA

## GEOMETRIA E ALGEBRA LINEARE

---

**ALESSANDRO BERARDUCCI**

Anno accademico 2023/24  
CdS INGEGNERIA AEROSPAZIALE  
Codice 164AA  
CFU 12

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
ALGEBRA LINEARE	MAT/03	LEZIONI	60	ALESSANDRO BERARDUCCI
GEOMETRIA	MAT/03	LEZIONI	60	ALESSANDRO BERARDUCCI

Obiettivi di apprendimento

### Conoscenze

- Insiemi e funzioni. Funzioni iniettive e surgettive.
- Strutture algebriche di gruppo commutativo, anello, campo e spazio vettoriale.
- Campo dei numeri complessi.
- Sistemi lineari. Metodo eliminazione di Gauss. Pivot e variabili libere. Teorema di Rouché-Capelli.
- Matrici.
- Spazi vettoriali. Dimensione. Sottospazi. Somma di sottospazi. Formula di Grassmann.
- Sottospazi affini. Equazioni parametriche e cartesiane.
- Applicazioni lineari. Nucleo e Immagine. Rango. Dimensione di nucleo e immagine.
- Proiezioni. Rotazioni.
- Cambio di base e matrici simili.
- Trasformazioni affini.
- Determinanti. Matrice inversa.
- Prodotto scalare. Spazi euclidei. Procedimento di Gram-Schmidt.
- Autovalori, autovettori e diagonalizzabilità di endomorfismi di spazi vettoriali di dimensione finita.
- Trasformazioni e matrici ortogonali.
- Trasformazioni autoaggiunte. Teorema spettrale.
- Applicazioni bilineari su spazi vettoriali reali di dimensione finita.
- Forme quadratiche.
- Classificazione delle coniche e cenni di quella delle quadriche.

### Modalità di verifica delle conoscenze

La verifica delle conoscenze verrà effettuata tramite due prove scritte durante il corso e una prova scritta e orale per ogni sessione d'esame.

### Capacità

- Descrivere insiemi e verificare iniettività e suriettività di applicazioni tra di essi.
- Applicare il principio di induzione.
- Riconoscere le strutture di gruppo commutativo, anello, campo e spazio vettoriale.
- Calcolare prodotti e inversi di numeri complessi in rappresentazione algebrica, trigonometrica ed esponenziale. Calcolare radici n-esime.
- Applicare l'eliminazione di Gauss, discutere sistemi lineari anche dipendenti da un parametro tramite il teorema di Rouché--Capelli.
- Calcolare combinazioni lineari, verificare dipendenza e indipendenza lineare. Verificare



## UNIVERSITÀ DI PISA

---

- che un sottoinsieme di uno spazio vettoriale è un sottospazio, determinare insiemi di generatori e basi. Verificare se due sottospazi sono in somma diretta. Applicare la formula di Grassmann.
- Stabilire se un'applicazione è lineare. Stabilire iniettività e suriettività di un'applicazione lineare. Calcolare dimensioni e basi del nucleo e dell'immagine di un'applicazione lineare. Calcolare le matrici associate ad un'applicazione lineare rispetto a basi diverse. Determinare matrici di cambiamenti di base e saperle usare per calcolare matrici associate ad un'applicazione lineare rispetto a basi diverse.
  - Trovare esempi di spazi e applicazioni lineari o affini con determinate caratteristiche.
  - Calcolare i determinanti tramite sviluppi per righe e per colonne, tramite la formula di Sarrus e tramite riduzione a scala. Usare i determinanti per calcolare il rango di matrici rettangolari anche dipendenti da parametri, per calcolare l'inversa di una matrice invertibile e per risolvere sistemi lineari tramite la regola di Cramer.
  - Determinare polinomio caratteristico, autovalori con molteplicità algebriche e geometriche, autospazi e diagonalizzabilità di un endomorfismo, anche dipendente da parametri, di uno spazio vettoriale.
  - Calcolare prodotti scalari, norme, distanze, proiezioni ortogonali, basi di sottospazi ortogonali, angoli e basi ortonormali tramite il procedimento di ortonormalizzazione di Gram--Schmidt.
  - Determinare basi ortonormali di autovettori. Determinare matrici ortogonali che diagonalizzano matrici simmetriche. Riconoscere e studiare trasformazioni ortogonali degli spazi euclidei standard di dimensione due e tre.
  - Riconoscere equazioni parametriche e cartesiane di rette e piani affini. Determinare giaciture di rette e piani. Determinare equazioni parametriche a partire da equazioni cartesiane e viceversa, sia per rette che per piani. Determinare rette e piani soddisfacenti condizioni di parallelismo, contenimento, ortogonalità, intersezione con rette, piani, vettori o punti. Determinare posizioni reciproche tra sottospazi affini. Saper utilizzare il prodotto vettoriale per gli scopi anzidetti.
  - Verificare che un'applicazione è bilineare e simmetrica, calcolarne la matrice rispetto ad una base, stabilire se è degenere. Determinare sottospazi ortogonali e basi ortogonali per applicazione bilineari simmetriche anche dipendenti da parametri. Determinare la segnatura di applicazioni bilineari simmetriche anche dipendenti da parametri e delle loro restrizioni a sottospazi anche dipendenti da parametri. Determinare vettori e sottospazi soddisfacenti a condizioni assegnate in relazione ad un'applicazione bilineare simmetrica anche dipendente da parametri.
  - Determinare tipo, equazione canonica ed eventuale decomposizione nell'unione di due rette di una conica anche dipendente da parametri.

### *Modalità di verifica delle capacità*

Lo studente dovrà dimostrare di sapere risolvere semplici problemi applicando le capacità acquisite.

### *Comportamenti*

Lo studente potrà acquisire la capacità di valutare la propria preparazione e/o di studiare in gruppo, interagendo con altri studenti.

### *Modalità di verifica dei comportamenti*

Non saranno effettuate verifiche dei comportamenti.



## UNIVERSITÀ DI PISA

---

### Prerequisiti (conoscenze iniziali)

Calcolo letterale, risoluzione di equazioni di primo e secondo grado, elementi di geometria analitica nel piano, elementi di geometria euclidea e trigonometria.

### Indicazioni metodologiche

- Lezioni ed esercitazioni in classe.
- lezioni a distanza tramite la piattaforma Microsoft Teams in caso di restrizioni dovute all'emergenza covid-19.
- esercitazioni in gruppo nel periodo gennaio-febbraio
- sito e-learning contenente: comunicazioni e informazioni, dispense del corso con esercizi, scritti degli anni precedenti
- due compitini di verifica durante l'anno

### Programma (contenuti dell'insegnamento)

**Elementi di teoria degli insiemi e algebra.** Operazioni tra insiemi. Insiemi numerici, principio d'induzione. Funzioni. Operazioni, strutture algebriche. Polinomi. Numeri complessi.

**Spazi vettoriali.** Definizione e esempi. Gli spazi  $R^n$  e  $C^n$ . Dipendenza lineare, generatori e basi. Coordinate. Dimensione. Sottospazi vettoriali. Somma, intersezione, formula di Grassmann, somma diretta.

**Applicazioni lineari e matrici.** Definizioni ed esempi. Nucleo e immagine. Algebra delle matrici. Applicazione lineare associata ad una matrice. Matrice associata ad una applicazione lineare. Cambio di base.

**Determinante.** Determinante delle matrici quadrate e significato geometrico. Proprietà caratterizzanti. Sviluppo di Laplace. Teorema di Binet e matrice inversa. Rango.

**Sistemi lineari e sottospazi affini.** Metodo di Gauss. Sistemi omogenei. Teorema di Rouché-Capelli. Regola di Cramer. Equazioni parametriche e cartesiane di un sottospazio affine. Rette e piani nello spazio.

**Autovalori ed autovettori.** Sottospazi invarianti, autovalori, autovettori ed autospazi. Polinomio caratteristico. Esistenza di basi di autovettori e diagonalizzabilità.

**Spazi Euclidei reali e complessi.** Forme bilineari. Prodotti scalari. Segnatura. Norma, ortogonalità. Prodotto scalare canonico in  $R^n$ . Basi ortonormali. Procedimento di ortonormalizzazione di Gram–Schmidt. Disuguaglianza di Bessel. Isometrie. Matrici ortogonali. Trasformazioni autoaggiunte. Teorema spettrale.

**Geometria del piano e dello spazio.** Trasformazioni del piano e dello spazio. Isometrie affini, rotazioni, traslazioni, riflessioni. Prodotto vettoriale.

**Coniche e quadriche.** Definizione e classificazione.

### Bibliografia e materiale didattico

Dispense con esercizi disponibili sul sito e-learning del corso



## UNIVERSITÀ DI PISA

---

Indicazioni per non frequentanti

Non ci sono indicazioni specifiche per studenti non frequentanti.

### Modalità d'esame

L'esame consiste di un colloquio orale preceduto da una prova scritta. Verranno effettuati due compiti che, se superati, esonerano dallo scritto. Durante l'esame finale potrà essere richiesto al candidato di fornire definizioni e dimostrazioni, esemplificare le nozioni e i concetti del corso, risolvere problemi/esercizi scritti, davanti al docente o in separata sede.

*Ultimo aggiornamento 05/11/2023 10:59*