



## UNIVERSITÀ DI PISA

---

### COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

**MASSIMO GOBBINO**

Anno accademico 2023/24  
CdS FISICA  
Codice 637AA  
CFU 6

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA	MAT/05	LEZIONI	48	MASSIMO GOBBINO

Obiettivi di apprendimento

#### *Conoscenze*

Al termine del corso lo studente avrà acquisito le nozioni di base del calcolo differenziale e integrale per funzioni di più variabili.

#### *Modalità di verifica delle conoscenze*

L'acquisizione delle conoscenze sarà verificata tramite esercizi in un esame scritto e domande dirette in un esame orale.

Prerequisiti (conoscenze iniziali)

- Tutto il precorso, in particolare saper disegnare insiemi del piano descritti mediante equazioni e/o disequazioni e saper risolvere sistemi di equazioni.
- Tutto il corso di Analisi Matematica I (studi di funzione, limiti, calcolo integrale).
- Tutto il corso di Algebra Lineare (vettori, geometria analitica nel piano e nello spazio, matrici, forme quadratiche).

#### *Indicazioni metodologiche*

Lezioni registrate con messa a disposizione delle registrazioni.

Programma (contenuti dell'insegnamento)

### **Calcolo differenziale in più variabili**

- Lo spazio  $\mathbb{R}^n$ . Vettori e operazioni tra vettori. Norma, distanza, prodotto scalare.
- Funzioni di più variabili e loro grafico. Visualizzazione del grafico per funzioni di due variabili: linee di livello e restrizione alle rette (o curve) passanti per un punto.
- Limiti e continuità per funzioni di più variabili. Relazione tra il limite ed il limite delle restrizioni.
- Limiti all'infinito per funzioni di più variabili.
- Derivate parziali e direzionali per una funzione di più variabili e loro significato geometrico. Mancanza di relazioni tra l'esistenza delle

## UNIVERSITÀ DI PISA

---

- derivate parziali e direzionali in un punto e la continuità nel punto stesso.
- Differenziale per funzioni di più variabili e sua interpretazione geometrica in termini di (iper)piano tangente al grafico. Relazione tra le derivate direzionali e le derivate parziali per una funzione differenziabile. Gradiente e suo significato geometrico. Teorema del differenziale totale.
  - Derivate successive per funzioni di più variabili. Teorema di inversione dell'ordine di derivazione. Formula di Taylor in due o più variabili.
  - Massimi e minimi locali e globali per funzioni di più variabili. Se in un punto di massimo o minimo interno una funzione è differenziabile, allora il suo gradiente si annulla.
  - Richiami sulle forme quadratiche in più variabili: nozione di forma definita positiva e definita negativa.
  - Matrice Hessiana e comportamento locale di una funzione in un intorno di un punto stazionario. Convessità e concavità in più variabili.
  - Insiemi compatti in  $\mathbb{R}^n$ . Teorema di Weierstrass per funzioni di più variabili. Generalizzazioni del teorema di Weierstrass nel caso di insiemi non limitati.
  - Massimi e minimi vincolati: metodo delle linee di livello.
  - Massimi e minimi vincolati: metodo di parametrizzazione del vincolo.
  - Massimi e minimi vincolati: metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
  - Calcolo differenziale per funzioni da  $\mathbb{R}^n$  ad  $\mathbb{R}^m$ . Matrice Jacobiana.
  - Derivazione di funzioni composte. Derivazione di integrali dipendenti da parametro.
  - Teorema delle funzioni implicite.

### Calcolo integrale in più variabili

- Integrale di Riemann per funzioni di due o tre variabili e suo significato geometrico/fisico.
- Formula di riduzione di un integrale doppio a due integrali semplici mediante sezioni.
- Integrali tripli: formule di riduzione per sezioni e per colonne.
- Sfruttamento delle simmetrie per semplificare il calcolo di integrali doppi o tripli.
- Calcolo di aree, volumi e baricentri mediante integrali doppi e tripli.
- Coordinate polari nel piano. Coordinate cilindriche e sferiche nello spazio. Utilizzo delle coordinate polari e sferiche per il calcolo di integrali multipli.
- Formula generale per il cambio di variabili negli integrali doppi.
- Solidi di rotazione. Teorema di Guldino per il volume dei solidi di rotazione.
- Integrali impropri in più variabili: definizioni e studio della convergenza.

### Curve, superfici, calcolo vettoriale



## UNIVERSITÀ DI PISA

---

- Curve: definizione. Curve chiuse e semplici. Vettore, versore e retta tangente.
- Lunghezza di una curva: definizione e calcolo.
- Integrali curvilinei (integrale di una funzione lungo una curva).
- Forme differenziali.
- Integrale di una forma differenziale lungo una curva. Forme differenziali esatte e potenziali.
- Insiemi connessi, convessi, stellati, semplicemente connessi. Forme differenziali chiuse. Relazioni tra forme differenziali chiuse ed esatte.
- Superfici: definizioni, versore normale, piano tangente.
- Area di una superficie: definizione e calcolo.
- Teorema di Guldino per il calcolo dell'area di una superficie di rotazione.
- Integrali superficiali (integrale di una funzione su una superficie).
- Operatori differenziali: divergenza, rotore, Laplaciano, gradiente. Relazioni tra gli operatori differenziali.
- Orientazione di una superficie e del suo eventuale bordo.
- Formula di Gauss-Green (teorema della divergenza): enunciati ed applicazioni.
- Formula di Stokes (teorema del rotore): enunciati ed applicazioni.

### Bibliografia e materiale didattico

Marina Ghisi, Massimo Gobbino. "Analisi Matematica II, Schede ed Esercizi", casa editrice Esculapio.

### Modalità d'esame

L'esame consisterà di una prova scritta e di una prova orale.

### Pagina web del corso

[https://pagine.dm.unipi.it/gobbino/Home\\_Page/ArchivioDidattico.html](https://pagine.dm.unipi.it/gobbino/Home_Page/ArchivioDidattico.html)

Ultimo aggiornamento 28/08/2023 17:01