



# UNIVERSITÀ DI PISA

---

## MODELLI MATEMATICI AMBIENTALI

**PAOLO ACQUISTAPACE**

Anno accademico 2017/18  
CdS SCIENZE AMBIENTALI  
Codice 587AA  
CFU 12

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
MODELLISTICA AMBIENTALE	MAT/09	LEZIONI	104	PAOLO ACQUISTAPACE GIANDOMENICO MASTROENI

### Obiettivi di apprendimento

#### *Conoscenze*

Fornire gli strumenti concettuali e tecnici per l'analisi di problemi ambientali.  
Fornire gli strumenti informatici per simulare al computer i modelli visti negli altri moduli e visualizzare i risultati.

#### *Modalità di verifica delle conoscenze*

Esame scritto e orale.

#### *Capacità*

Saper costruire modelli matematici da utilizzare come strumento di conoscenza e di supporto alle decisioni.  
Saper utilizzare Matlab per effettuare semplici calcoli di algebra lineare, per simulare il comportamento di modelli basati su equazioni differenziali, e per visualizzare i risultati di tali simulazioni.

#### *Modalità di verifica delle capacità*

Esame scritto e orale.

#### *Comportamenti*

Civili.

#### *Modalità di verifica dei comportamenti*

Osservazione.

#### Prerequisiti (conoscenze iniziali)

Strumenti di metodo e di calcolo base della geometria analitica, dell'algebra lineare e dell'analisi matematica di una variabile.

#### Corequisiti

Parola inesistente.

#### Prerequisiti per studi successivi

Aver superato questo esame.

#### Indicazioni metodologiche

Capire, studiare, esercitarsi. Due delle tre, senza l'altra, non bastano.

#### Programma (contenuti dell'insegnamento)

Primo modulo (6 cfu):



## UNIVERSITÀ DI PISA

Richiami sulle funzioni reali di una variabile (svolti strada facendo): regole di calcolo in  $\mathbb{R}$ , equazioni e disequazioni. Intervalli di  $\mathbb{R}$ , funzioni, grafici. Valore assoluto, parabole, iperboli, funzioni trigonometriche. Continuità, teorema di Weierstrass e teorema dei valori intermedi. Geometria del piano: punti, rette, rette secanti e retta tangente ad un grafico, derivata di una funzione. Derivata delle funzioni elementari. Funzioni invertibili: continuità e derivabilità dell'inversa, derivata delle funzioni trigonometriche inverse. Funzioni esponenziali, funzioni logaritmo, funzioni iperboliche e funzioni iperboliche inverse. Teoremi sulle funzioni derivabili. Massimi e minimi relativi per funzioni di una variabile. Formula di Taylor; sviluppi di Taylor di  $1/(1-x)$ ,  $\exp(x)$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\arctan x$ ,  $(1+x)^a$ . Calcolo integrale: l'integrale come area, sue proprietà, teorema fondamentale del calcolo integrale, funzioni primitive; lista di primitive elementari. Integrazione per parti. Integrazione per sostituzione. Integrali impropri. Funzioni di più variabili: geometria analitica nel piano e nello spazio: norma euclidea, prodotto scalare, teorema di Carnot, coseno e seno dell'angolo fra due vettori espressi in coordinate, proiezione ortogonale di un vettore su di un altro, distanza di un punto da una retta (nel piano). Prodotto vettoriale in  $\mathbb{R}^3$ . Matrici  $m \times n$ , operazioni fra matrici. Caso di matrici quadrate: non commutatività del prodotto. Matrice nulla e matrice identità. Determinante di una matrice, matrici invertibili. Il modulo di un determinante  $2 \times 2$  o  $3 \times 3$  come area o volume. Piani in  $\mathbb{R}^3$ : equazione generale, equazione del piano passante per tre punti dati. Distanza di un punto da un piano; rette nello spazio. Distanza di un punto da una retta e distanza fra due rette. Autovalori e autovettori di una matrice. Numeri complessi: modulo, parte reale e immaginaria, coniugato; forma cartesiana e forma polare. Funzioni di  $N$  variabili: derivate parziali, derivate direzionali, differenziabilità, continuità, teorema del differenziale totale. Derivate successive: teorema di Schwarz, funzioni di classe  $C^k$ . Matrice Hessiana. Massimi e minimi relativi per funzioni di  $N$  variabili. Funzioni vettoriali di una variabile: generalità, continuità, derivabilità, regole di derivazione di un prodotto scalare, di un prodotto vettoriale (in  $\mathbb{R}^3$ ) e di un determinante, integrali vettoriali. Curve in  $\mathbb{R}^N$ , curve di classe  $C^1$ , lunghezza di una curva e formula per il suo calcolo. Curve di classe  $C^1$  a tratti. Esempi: grafici di funzioni, curve determinate da una equazione polare. Integrale di una funzione lungo una curva. Massimi e minimi vincolati: punti stazionari vincolati, loro caratterizzazione geometrica nel caso di vincoli espressi in forma parametrica e in forma di curva di livello: metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Integrali multipli: significato geometrico e proprietà; insiemi del piano normali rispetto a un asse, insiemi dello spazio normali rispetto a un piano. Calcolo di integrali doppi e tripli su insiemi normali. Cambiamento di variabili, coordinate polari nel piano e nello spazio, coordinate cilindriche. Integrali impropri in più variabili: densità normale di probabilità di media  $\mu$  e varianza  $\sigma^2$ . Integrali impropri di funzioni a segno non costante. Sommabilità di  $|x|^{-a}$  vicino all'origine per  $a \in \mathbb{N}$ . Criterio di sommabilità per confronto. Superfici regolari in  $\mathbb{R}^3$ : definizione, piano tangente, versore normale, area, integrale di una funzione continua su una superficie. Campi vettoriali: esempi, linee di forza, divergenza, rotore. Integrale di un campo vettoriale lungo una curva, sua dipendenza dall'orientazione. Aperti semplicemente connessi e non, formule di Gauss-Green nel piano, applicazione al calcolo di aree. Superfici orientate con bordo, orientazioni coerenti della tangente al bordo e della normale alla superficie. Teorema di Stokes. Campi vettoriali conservativi, irrotazionali e solenoidali su un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^3$ .

Secondo modulo (3 cfu): 1) Problemi e modelli. Relazioni esistenti fra i modelli e la realtà. Considerazioni sui linguaggi utilizzabili per descrivere i modelli. Modelli matematici. Concetti introduttivi sulla struttura dei modelli e sulla simulazione. Equazioni differenziali: generalità. Esempio di modello continuo e del corrispondente modello discreto. Un modello di crescita di una popolazione con tasso di natalità e mortalità costante. Modelli di crescita di una popolazione con tasso di natalità e mortalità dipendenti dal tempo.

2) Equazioni differenziali a variabili separabili. Discretizzazione. Un modello di crescita di una popolazione in presenza di risorse limitate con tasso di crescita dipendente dalla popolazione. La funzione logistica. Sistemi dinamici. Punti di equilibrio stabile e instabile. Punti di equilibrio asintoticamente stabile. Applicazioni: la funzione logistica in presenza di un tasso di mortalità costante.

3) Equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti omogenee e non omogenee. Sistemi di equazioni differenziali lineari. Applicazioni alle dinamiche di crescita di due popolazioni. Stabilità della soluzione nulla di un sistema lineare. Applicazioni: metodo di linearizzazione per lo studio della stabilità dei punti di equilibrio di un sistema dinamico.

4) Modelli di due popolazioni. I modelli preda-predatore di Lotka-Volterra: studio delle interazioni tra popolazioni di animali e/o di vegetazione coesistenti o in competizione fra di loro. Il modello preda-predatore nella variante di Samuelson. Definizione e analisi della stabilità dei punti di equilibrio.

5) Presentazione ed analisi dei modelli per la descrizione di fenomeni quali la diffusione di inquinanti e la diffusione di epidemie.

Terzo modulo (3 cfu)

1) Sintassi base di Matlab: variabili, script, funzioni; istruzioni if, while, for.

2) Funzioni di gestione di vettori e matrici: indicizzazione con l'operatore "due punti", length, size, concatenazione di vettori e matrici.

3) Funzioni di algebra lineare: prodotti matrici e vettore, soluzione di sistemi lineari con l'operatore backslash, autovalori con eig().

4) Soluzione di equazioni differenziali e sistemi (problemi ai valori iniziali), tra cui i modelli visti nella prima parte del corso, con il metodo di Eulero esplicito e con ode45. Grafici quantità/tempo e grafici delle fasi per sistemi 2D.

### Bibliografia e materiale didattico

<http://unimap.unipi.it/registri/detregistriNEW.php?re=180083:::&ri=5114> (registro delle lezioni)

<http://www.dm.unipi.it/~acquistp/ambi.html> (fogli delle lezioni, testi d'esame)

Robert A. Adams, Christopher Essex, Calculus: a complete course, Pearson, Toronto 2008 (libro di riferimento)

<http://pages.di.unipi.it/mastroeni/#mod> (appunti, testi d'esame)

Tutto il materiale del corso si trova anche su

<https://polo3.elearning.unipi.it/course/view.php?id=2722>

### Indicazioni per non frequentanti

Frequentare, o almeno collegarsi con i siti segnalati.

### Modalità d'esame

Scritto e orale. È possibile sostenere separatamente sia lo scritto che l'orale per il primo modulo e per il secondo e terzo. Il voto definitivo è unico.



## UNIVERSITÀ DI PISA

---

Stage e tirocini  
Non previsti.

Pagina web del corso  
<https://polo3.elearning.unipi.it/course/view.php?id=2722>

Altri riferimenti web  
Già segnalati.

Note  
do re mi fa sol la si, per tacer dei semitoni.

*Ultimo aggiornamento 06/09/2017 10:05*