



# UNIVERSITÀ DI PISA

---

## ALGEBRA LINEARE E ANALISI MATEMATICA II

**GIUSEPPE PUGLISI**

Academic year	2018/19
Course	INGEGNERIA ELETTRONICA
Code	591AA
Credits	12

Modules	Area	Type	Hours	Teacher(s)
ALGEBRA LINEARE	MAT/03	LEZIONI	60	MASSIMO GOBBINO
ANALISI MATEMATICA	MAT/05	LEZIONI	60	GIUSEPPE PUGLISI

### Obiettivi di apprendimento

#### *Conoscenze*

Gli strumenti concettuali di base riguardanti l'algebra lineare e l'analisi in più variabili.

#### *Modalità di verifica delle conoscenze*

Esame scritto e orale.

#### *Capacità*

Al termine del corso, lo studente si spera abbia capito e sappia usare gli strumenti di base inerenti agli argomenti trattati.

#### *Modalità di verifica delle capacità*

Esame scritto e orale.

#### *Comportamenti*

Lo studente, abituato ad interessarsi a concetti profondi e importanti, perde interesse per la burocrazia inutile.

#### *Modalità di verifica dei comportamenti*

Nessuna.

Prerequisiti (conoscenze iniziali)

## Modulo di Algebra Lineare

- Tutto il precorso (in particolare polinomi, geometria analitica, trigonometria).
- Parte del corso di Analisi Matematica 1 (in particolare insiemi e funzioni, principio di induzione, numeri complessi).

Modulo di Analisi II

Preliminari/Prerequisiti

– Analisi Matematica I (studi di funzione, limiti, calcolo integrale).

– Algebra Lineare (vettori, geometria analitica nel piano e nello spazio, applicazioni lineari e prodotti scalari).

Programma (contenuti dell'insegnamento)

## Modulo di Algebra Lineare

## UNIVERSITÀ DI PISA

---

### Spazi vettoriali ed applicazioni lineari.

- Campi e spazi vettoriali. Sottospazi vettoriali.
- Dipendenza e indipendenza lineare, generatori, basi e componenti di un vettore rispetto ad una base, dimensione di uno spazio e di un sottospazio vettoriale. Span di un insieme di vettori.
- Somma ed intersezione di sottospazi vettoriali. Formula di Grassmann. Somma diretta di sottospazi e componenti di un vettore rispetto ad una somma diretta.
- Applicazioni lineari. Matrice associata ad un'applicazione lineare dopo aver scelto basi in partenza ed arrivo.
- Operazioni tra matrici: somma, prodotto per uno scalare, prodotto tra matrici. Trasposta ed inversa di una matrice. Calcolo della matrice inversa mediante l'algoritmo di Gauss-Jordan e mediante la matrice dei cofattori.
- Matrici di cambio di base. Similitudine tra matrici.
- Nucleo e immagine di un'applicazione lineare. Teorema della dimensione. Legami tra iniettività, surgettività e dimensioni degli spazi di partenza ed arrivo per applicazioni lineari.
- Determinante di una matrice: definizione, principali proprietà, esistenza, unicità. Calcolo mediante l'algoritmo di Gauss e gli sviluppi di Laplace. Determinante della trasposta, dell'inversa, del prodotto.
- Rango di una matrice. Equivalenza tra R-rango, C-rango, D-rango. Calcolo del rango mediante i minori e mediante l'algoritmo di Gauss.
- Autovalori, autovettori, autospazi. Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore.
- Polinomio minimo, polinomio caratteristico. Relazioni tra coefficienti del polinomio caratteristico, traccia, determinante, autovalori.
- Forme canoniche. Criteri di diagonalizzabilità sui reali e sui complessi. Forma canonica di Jordan sui reali e sui complessi. Applicazioni e matrici simmetriche. Teorema spettrale.

### Prodotti scalari e forme quadratiche

- Prodotto scalare canonico in  $\mathbb{R}^n$ . Norma e distanza.
- Basi ortogonali e ortonormali. Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.
- Matrici ortogonali.
- Ortogonale di un sottospazio. Proiezioni ortogonali su sottospazi.
- Forme quadratiche e matrici ad esse associate. Definizione di segnatura.
- Metodi per determinare la segnatura di una forma quadratica: completamento dei quadrati, segno degli autovalori, metodo di Sylvester



## UNIVERSITÀ DI PISA

---

(minori orlati), metodo di Cartesio (segno dei coefficienti del polinomio caratteristico).

- Prodotti scalari in generale e matrici ad essi associate. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.
- Basi ortogonali ed ortonormali (e procedimento di ortogonalizzazione) rispetto ad un generico prodotto scalare definito positivo.
- Applicazioni simmetriche rispetto ad un generico prodotto scalare e proprietà delle matrici ad esse associate. Teorema spettrale rispetto ad un generico prodotto scalare definito positivo.

### Geometria analitica

- Vettori geometrici nel piano, nello spazio, e più in generale in  $\mathbb{R}^n$ .
- Geometria analitica nel piano. Equazioni cartesiane e parametriche di rette. Angoli e distanze.
- Geometria analitica nello spazio. Equazioni cartesiane e parametriche di rette e piani. Angoli e distanze tra rette e piani.
- Equazioni cartesiane e parametriche di sottospazi affini di  $\mathbb{R}^n$ .
- Affinità e isometrie in  $\mathbb{R}^n$ . Teorema di struttura delle isometrie in  $\mathbb{R}^n$ .
- Isometrie nel piano e loro classificazione sulla base dei punti fissi. Rotazioni intorno a punti e simmetrie rispetto a rette.
- Isometrie nello spazio e loro classificazione sulla base dei punti fissi. Rotazioni intorno a rette e simmetrie rispetto a piani.

### Sistemi lineari

- Scrittura di un sistema lineare in termini di matrici e vettori. Interpretazioni in termini di combinazioni lineari, Span, ed in termini di applicazioni lineari.
- Struttura generale dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare, omogeneo e non omogeneo.
- Matrici a scala e risoluzione di un sistema lineare mediante algoritmo di Gauss.
- Risolubilità di un sistema lineare e rango: teorema di Rouché-Capelli.
- Metodo di Cramer per sistemi lineari.

Modulo di Analisi II

Preliminari/Prerequisiti

- Analisi Matematica I (studi di funzione, limiti, calcolo integrale).
- Algebra Lineare (vettori, geometria analitica nel piano e nello spazio, matrici, forme quadratiche).

Calcolo differenziale in più variabili

- Lo spazio  $\mathbb{R}^n$ . Vettori e operazioni tra vettori. Norma, distanza, prodotto scalare.
- Funzioni di più variabili e loro grafico. Visualizzazione del grafico per funzioni di due variabili:



## UNIVERSITÀ DI PISA

---

linee di livello e restrizione alle rette (o curve) passanti per un punto.

- Limiti e continuità per funzioni di più variabili.
  - Derivate parziali e direzionali per una funzione di più variabili e loro significato geometrico.
  - Differenziale per funzioni di più variabili e sua interpretazione geometrica in termini di (iper)piano tangente al grafico. Relazione tra le derivate direzionali e le derivate parziali per una funzione differenziabile. Gradiente e suo significato geometrico. Teorema del differenziale totale.
  - Derivate successive per funzioni di più variabili. Teorema di inversione dell'ordine di derivazione. Formula di Taylor in due o più variabili (cenni).
  - Massimi e minimi locali e globali per funzioni di più variabili.
  - Matrice Hessiana e comportamento locale di una funzione in un intorno di un punto stazionario.
  - Insiemi compatti in  $\mathbb{R}^n$ . Teorema di Weierstass per funzioni di più variabili.
  - Massimi e minimi vincolati.
  - Calcolo differenziale per funzioni da  $\mathbb{R}^n$  ad  $\mathbb{R}^m$ . Matrice Jacobiana.
  - Integrale di Riemann per funzioni di due o tre variabili e suo significato geometrico/fisico.
  - Formula di riduzione di un integrale doppio a due integrali semplici mediante sezioni.
  - Integrali tripli: formule di riduzione per sezioni e per colonne.
  - Sfruttamento delle simmetrie per semplificare il calcolo di integrali doppi o tripli.
  - Calcolo di aree, volumi e baricentri mediante integrali doppi e tripli.
  - Coordinate polari nel piano. Coordinate cilindriche e sferiche nello spazio. Utilizzo delle coordinate polari e sferiche per il calcolo di integrali multipli.
  - Formula generale per il cambio di variabili negli integrali doppi.
  - Integrali impropri in più variabili: definizioni e studio della convergenza.
- Curve, superfici, calcolo vettoriale
- Curve: definizione. Curve chiuse e semplici. Vettore, versore e retta tangente.
  - Lunghezza di una curva: definizione e calcolo.
  - Integrali curvilinei (integrale di una funzione lungo una curva).
  - campi vettoriali
  - Integrale di un campo vettoriale lungo una curva. Campi vettoriali e potenziali.
  - Insiemi connessi, convessi, stellati, semplicemente connessi. Campi conservativi e irrotazionali.
  - Superfici: definizioni, versore normale, piano tangente.
  - Area di una superficie: definizione e calcolo.
  - Integrali superficiali (integrale di una funzione su una superficie).
  - Operatori differenziali: divergenza, rotore, gradiente. Relazioni tra gli operatori differenziali.
  - Orientazione di una superficie e del suo eventuale bordo.
  - Formula di Gauss-Green: enunciati ed applicazioni.
  - Formula di Stokes: enunciati ed applicazioni.

Ultimo aggiornamento 21/09/2018 12:04