



# UNIVERSITÀ DI PISA

## ALGEBRE E GRUPPI DI LIE

---

**GIOVANNI GAIFFI**

Anno accademico 2018/19  
CdS MATEMATICA  
Codice 089AA  
CFU 6

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
ALGEBRE E GRUPPI DI LIE/a	MAT/02	LEZIONI	42	GIOVANNI GAIFFI ENRICO LE DONNE

Obiettivi di apprendimento

### *Conoscenze*

- Al termine del corso studente avrà acquisito le prime conoscenze in merito agli strumenti e alle metodologie per lavorare in algebra e geometria con le algebre e i gruppi di Lie.

### *Modalità di verifica delle conoscenze*

Esame orale.

### *Capacità*

Saper lavorare con le algebre e i gruppi di Lie.

### *Modalità di verifica delle capacità*

Risoluzione, durante l'orale, di esercizi e discussione degli aspetti teorici.

### *Comportamenti*

Partecipare attivamente alle lezioni.

### *Modalità di verifica dei comportamenti*

Nessuna.

### *Prerequisiti (conoscenze iniziali)*

Algebra lineare, come studiata nel corso di Geometria del primo anno. Primi elementi di geometria differenziale.

### *Corequisiti*

Nessuno.

### *Prerequisiti per studi successivi*

Nessuno.

### *Indicazioni metodologiche*

Lezioni frontali, con ausilio di slides.

### *Programma (contenuti dell'insegnamento)*

Introduzione ai gruppi di Lie. Sottogruppi a un parametro. La mappa esponenziale. Classificazione dei gruppi di Lie abeliani connessi. Definizione di sottogruppo di Lie. Caratterizzazione dei sottogruppi chiusi. Esempi: gruppi di trasformazioni unitarie e ortogonali.



## UNIVERSITÀ DI PISA

---

I gruppi simplettici e altri gruppi classici. Esercizi e prime proprietà (connessione, caratterizzazione del tangente..).  
Rappresentazioni di gruppi topologici compatti. Informazioni sulla misura di Haar. Tori massimali nei gruppi di Lie compatti.  
Azione aggiunta di un gruppo compatto sul tangente. Caso dei tori e dei tori massimali. Radici. Esempi  $SU(n)$ ,  $SP(n)$ ,  $SO(2n)$ ,  $SO(2n+1)$ .  
Sistemi di radici, diagrammi di Dynkin e loro classificazione completa. Gruppi di Weyl.  
Algebre di Lie. Algebra di Lie associata ad un gruppo di Lie. Le azioni aggiunte Ad e ad. Forme bilineari e invarianza. Formula di Campbell Hausdorff (solo enunciato).  
Tutti i tori massimali di un gruppo compatto sono coniugati. Le algebre di Lie di un gruppo compatto sono riduttive. La forma di Killing.  
Costruzione di un gruppo di Lie compatto avente una data algebra di Lie con forma di Killing definita negativa. Caratterizzazione delle algebre di Lie semisemplici compatte. Rappresentazioni irriducibili di un gruppo topologico e il Lemma di Schur.  
Unicità della decomposizione in irriducibili di una rappresentazione di un gruppo. Il trucco unitario: esempio nel caso di  $sl(n, C)$ .  
Classificazione delle rappresentazioni irriducibili di  $sl(2, C)$ .  
Sollevamento della struttura di gruppo topologico ad un rivestimento. Caratterizzazione della famiglia di gruppi di Lie che hanno una data algebra di Lie fissata. Calcolo del primo gruppo di omotopia per alcuni gruppi classici complessi.  
Algebre risolubili, prime proprietà. Il teorema di Lie. Algebre torali massimali e splitting della complessificazione di un'algebra di Lie semisemplice compatta come somma dei suoi spazi peso rispetto alle radici.  
Come si ottiene il sistema di radici di un'algebra di Lie semisemplice complessa. Confronti fra metodo geometrico (visto per i gruppi compatti) e algebrico di ottenere un sistema di radici. Corollario: dimostrazione del teorema di classificazione delle algebre di Lie compatte reali.  
Informazioni sul fatto che questo si estende al teorema di classificazione delle algebre di Lie semisemplici complesse.  
Algebre tensoriali e simmetriche. L'algebra involuante di un'algebra di Lie, il teorema di Poincaré e Birkhoff-Witt e corollari.  
Azioni dell'algebra involuante. Dimostrazione del teorema di Poincaré e Birkhoff Witt.  
Rappresentazioni di un'algebra di Lie semisemplice complessa. Spazi peso. Moduli standard ciclici e loro caratterizzazione. Teorema: ad ogni elemento nel duale della sottoalgebra torale corrisponde un unico modulo standard ciclico irriducibile.  
Teorema di classificazione completa delle rappresentazioni irriducibili complesse di dimensione finita di un'algebra di Lie semisemplice complessa. Esempi: rappresentazioni di  $sl(n, C)$  nell'algebra esterna e nell'algebra simmetrica.  
Cenni su: decomposizione di Levi, Teorema di Levi-Malcev, Teorema di Ado, rappresentazioni irriducibili di algebre di Lie non semisemplici.

### Bibliografia e materiale didattico

Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer.  
Knapp, Lie groups beyond an introduction, Birkhauser.  
Warner, Foundation of differentiable manifolds and Lie groups, Springer.

### Indicazioni per non frequentanti

Nessuna.

### Modalità d'esame

Esame orale.

### Stage e tirocini

Nessuno.

### Pagina web del corso

<https://elearning.dm.unipi.it/course/view.php?id=125>

Ultimo aggiornamento 21/03/2019 12:15