UNIVERSITÀ DI PISA

CALCOLO DELLE VARIAZIONI A

BOZHIDAR VELICHKOV

Anno accademico	2020/21
CdS	MATEMATICA
Codice	096AA
CFU	6

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
CALCOLO DELLE VARIAZIONI A/a	MAT/05	LEZIONI	42	BOZHIDAR VELICHKOV

Obiettivi di apprendimento

Conoscenze
Il corso ha come obiettivo di introdurre gli studenti alle tecniche ed i metodi del calcolo delle variazioni, in particolare quelli che riguardano la regolarità dei minimi, attraverso tre classi di problemi:
1) equazioni differenziali parziali per operatori ellitici in forma divergenza;
2) superfici minime e problemi isoperimetrici nella formulazione di De Giorgi;
3) problemi a frontiera libera.

Modalità di verifica delle conoscenze
Esame orale

Capacità
Applicare le tecniche ed i metodi presentati durante il corso nello studio di diversi problemi variazionali.

Modalità di verifica delle capacità
Esame orale

Comportamenti
Diversi esercizi e problemi aperti saranno messi a disposizione degli studenti sul sito del corso.

Modalità di verifica dei comportamenti
Esame orale

Prerequisiti (conoscenze iniziali)
Spazi di Sobolev. Misura e integrazione secondo Lebesgue.

Programma (contenuti dell'insegnamento)
Il corso sarà dedicato al calcolo delle variazioni e le PDE ellittiche.
Capitolo 1. Spazi di Sobolev ed equazioni ellittiche. Esistenza e unicità delle soluzioni in domini limitati con dati di Dirichlet, Neumann e Robin al bordo. Principio di massimo e teoremi di confronto. Esistenza di soluzioni in domini illimitati - principio di concentrazione-compattezza. Esistenza di soluzioni per problemi variazionali - problemi a frontiera libera. Autovalori e autofunzioni di operatori ellittici in domini limitati. Regolarità ellittica e applicazioni.
Gli argomenti di questo capitolo sono classici e si trovano in numerosi testi. Il capitolo servirà anche per richiamare alcune proprietà degli spazi di Sobolev.
Capitolo 2. Funzioni BV e insiemi di perimetro finito. Teoremi di compattezza. Teorema della traccia. Disuguaglianza isoperimetrica e le sue applicazioni. Formula della coarea. Simmetrizzazione di Schwartz e applicazioni. Stime L^∞ per le soluzioni di problemi ellittici.
Lo scopo di questo capitolo è di introdurre gli insiemi di perimetro finito in senso di De Giorgi, proponendo anche due applicazioni importanti di questa teoria nell'ambito delle equazioni alle derivate parziali: la simmetrizzazione di Schwarz e le stime L^∞. I testi di riferimento sono i libri di Giusti "Minimal surfaces and functions of bounded variation" e Maggi "Sets of finite perimeter and geometric variational problems").
Capitolo 3. Funzioni armoniche. Formula della media. Stima del gradiente. Disuguaglianza di Harnack. Funzioni subarmoniche e

superarmoniche. Principio del massimo di Hopf e teorema di Serrin. Identità di Bochner e applicazioni: P-funzioni. Formula di monotonia di Almgren. Funzioni armoniche omogenee e armoniche sferiche. Comportamento delle soluzioni vicino al bordo. Funzioni armoniche in senso di viscosità.
Questo capitolo è dedicato alle funzioni armoniche e le loro proprietà. Molti dei metodi e degli strumenti che introdurremo in questo ambito troveranno applicazioni nei casi più generali di problemi ellittici e anche nei problemi variazionali più difficili come nello studio dei problemi a frontiera libera e le superfici minime. Il testo di riferimento principale saranno le dispense del corso.
Capitolo 4. Regolarità per problemi ellittici in forma divergenza. Funzioni holderiane. Disuguaglianza di Morrey. Disuguaglianza di Caccioppoli. Teoria di De Giorgi-Nash-Moser. Stime di Schauder.
Questo capitolo è dedicato alla regolarità delle soluzioni negli spazi di Hölder. L'obiettivo è di introdurre in un contesto semplice alcuni metodi moderni per dimostrare la regolarità dei minimi. Come per il capitolo precedente, il testo di riferimento principlae saranno le dispense del corso.
Capitolo 5. Problemi a frontiera libera. Problema di Bernoulli a una e due fasi. Problemi dell'ostacolo e dell'ostacolo sottile. Partizioni ottime. Regolarità degli insiemi isoperimetrici. Bordo regolare e bordo singolare. Teoremi di epsilon-regolarità. Formule di monotonia di Weiss e di Almgren. Riscalamenti e blow-up. Dimensione dell'insieme singolare - misura di Hausdorff, dimensione di Hausdorff e principio di Federer. Disuguaglianze epiperimetriche e le loro applicazioni.
Questo capitolo riguarda problemi avanzati, alcuni sono classici mentre altri sono oggetto di ricerca attuale. I testi di riferimento saranno sopratutto articoli recenti, le dispense del corso e le lecture notes "Regularity of the one-phase free boundaries". Il tempo sicuramente non sarà sufficiente per un'analisi esaustiva di tutti i problemi di questo capitolo. L'obiettivo principale sarà dimostrare completamente un teorema di epsilon-regolarità e mostrare come si ottengono le stime sulla dimensione dell'insieme singolare.

Bibliografia e materiale didattico

Il testo di riferimento principale saranno le dispense del corso.
Come testi complementari sono consigliati:
Gilbarg, Trudinger - Elliptic partial differential equations of second order

Jost - Partial differential equations
Brezis - Analisi Funzionale
Giusti - Minimal surfaces and functions of bounded variation
Maggi - Sets of finite perimeter and geometric variational problems

Modalità d'esame

Esame orale

Ultimo aggiornamento 13/08/2020 01:22