



# UNIVERSITÀ DI PISA

---

## COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

**BOZHIDAR VELICHKOV**

Academic year	2021/22
Course	FISICA
Code	637AA
Credits	6

Modules	Area	Type	Hours	Teacher(s)
COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA	MAT/05	LEZIONI	48	BOZHIDAR VELICHKOV

### Obiettivi di apprendimento

#### Conoscenze

Al termine del corso lo studente sarà in grado di padroneggiare e utilizzare gli strumenti dell'analisi in più variabili in particolare: calcolo differenziale, forme differenziali, integrali multipli, integrali su linee e superfici.

#### Modalità di verifica delle conoscenze

- La verifica delle conoscenze sarà oggetto della valutazione dell'elaborato scritto previsto all'inizio di ogni sessione d'esame.
- E' prevista una prova orale.
- Gli orali saranno trasmessi in streaming sul gruppo teams del corso: **637AA 21/22 - COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA [FIS-L]**

#### Capacità

Lo studente sarà in grado di svolgere esercizi riguardanti: studio di funzioni in più variabili, forme differenziali, calcolo di integrali multipli, calcolo di flussi su superfici, calcolo di integrali curvilinei.

#### Modalità di verifica delle capacità

Svolgimento di esercizi durante la prova scritta.

#### Comportamenti

Lo studente sarà in grado di scegliere gli strumenti più opportuni per risolvere i vari problemi dell'Analisi.

#### Modalità di verifica dei comportamenti

Svolgimento di esercizi durante la prova scritta

#### Prerequisiti (conoscenze iniziali)

Analisi Matematica in una variabile: calcolo differenziale, studio di funzioni, calcolo di integrali, studio di integrali impropri.

#### Programma (contenuti dell'insegnamento)

1. Elementi di topologia nello spazio euclideo.
  - 1.1. Lo spazio euclideo. Prodotto scalare e disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. Distanza euclidea e disuguaglianza triangolare. Convergenza di successioni e successioni di Cauchy. Teorema di Bolzano-Weierstrass. Funzioni continue. Composizione di funzioni continue.
  - 1.2. Insiemi aperti e insiemi chiusi. Chiusura, parte interna e frontiera di un insieme.
  - 1.3. Insiemi compatti, compatti per successioni, insiemei chiusi e limitati. Funzioni continue su insiemi compatti: teorema di Weierstrass. Uniforme continuità e teorema di Cantor.
  - 1.4. Insiemi connessi per archi. Aperti connessi per archi. Teorema del valore intermedio. Una funzione derivabile, definita su un aperto connesso per archi, e con gradiente nullo è costante.
2. Studio di funzioni di più variabili.
  - 2.1. Limiti di funzioni. Limiti direzionali. Limiti di funzioni e coordinate polari. Limiti di funzioni e convergenza uniforme.
  - 2.2. Funzioni differenziabili. Convergenza uniforme e interpretazione geometrica della differenziabilità. Esempi e controesempi sulla differenziabilità, derivabilità e continuità. Teorema del differenziale. Derivazione lungo curve regolari.



## UNIVERSITÀ DI PISA

2.3. Derivate parziali di ordine superiore - teorema di Schwartz. Matrice Hessiana. Formula di Taylor al secondo ordine. Massimi e minimi relativi e assoluti. Punti di sella. Condizioni necessarie e sufficienti. Matrici semidefinite positive, semidefinite negative, definite positive, definite negative, indefinite.

Massimi e minimi sul bordo di un insieme regolare. Condizioni necessarie e sufficienti al primo e al secondo ordine. Vettore normale e vettore tangente al bordo di un insieme regolare.

2.4. Teorema della funzione implicita. Moltiplicatori di Lagrange. Massimi e minimi vincolati.

2.5. Funzioni differenziabili a valori vettoriali. Composizione di funzioni differenziabili. Formula per le derivate parziali della funzione composta. Diffeomorfismi tra insiemi aperti. Teorema della funzione inversa.

3. Forme differenziali e integrali curvilinei

3.1. Definizione e operazioni con le forme differenziali: somma e prodotto con una funzione.

Prodotto esterno. Differenziale di una funzione.

Derivata esterna di una forma differenziale.

Forme chiuse e forme esatte. Le forme esatte sono chiuse. Esempio di una forma chiusa che non è esatta.

3.2. Integrazione su curve. Integrazione di 1-forme su curve. Curve chiuse, semplici, regolari a tratti.

Concatenamento e curve opposte. Integrazione di forme esatte su curve chiuse. Integrazione di funzioni su curve. Integrale di una funzione continua su una curva.

Integrazione su curve equivalenti, opposte e concatenate. Lunghezza di una curva.

3.3. Teorema della derivazione sotto il segno dell'integrale.

Lemma di Poincaré sui rettangoli. Forme chiuse e forme esatte in aperti stellati.

Domini diffeomorfi e forme differenziali. Insiemi semplicemente connessi.

4. Integrazione.

4.1. Integrale di Riemann su un dominio rettangolare. Partizioni e somme di Riemann superiore e inferiore. Integrale di Riemann superiore e inferiore. Integrabilità delle funzioni continue su domini rettangolari. Teorema di Fubini su domini rettangolari. Definizione di integrale su un insieme limitato.

Domini normali. Integrabilità di una funzione continua su un dominio normale.

Teorema di Fubini in domini normali.

4.2. Formule di Gauss-Green. Teorema della divergenza.

Orientazione in dimensione due. Curve che parametrizzano il bordo di un insieme in senso antiorario.

Formula di Stokes. Cambio di variabili in dimensione due. Integrazione in coordinate polari nel piano.

Integrazione su superfici parametriche. Formula di Stokes per le superfici.

Prodotto vettoriale in dimensione tre. Divergenza e rotore di un campo in dimensione tre.

Integrazione di funzioni su superfici. Teorema del rotore.

### Bibliografia e materiale didattico

Dispense del corso sul sito <http://www.velichkov.it/analisi2-fisica-2021-2022.html>

Analisi Matematica II. Marcellini - Sbordone.

Analisi Matematica II. Fusco - Marcellini - Sbordone

Analisi Matematica II. Acerbi - Buttazzo

Analisi Matematica II, Schede ed Esercizi, autori Ghisi - Gobbino, editrice Esculapio

### Modalità d'esame

Scritto e orale.

Le modalità d'esame verranno aggiornate in base all'evolversi della situazione "covid"

### Pagina web del corso

<https://people.dm.unipi.it/velichkov/analisi2-fisica-2021-2022.html>

### Altri riferimenti web

<http://www.velichkov.it/teaching.html>

Ultimo aggiornamento 03/01/2022 14:56