



## UNIVERSITÀ DI PISA

---

# ELEMENTI DI PROBABILITÀ E STATISTICA

**MARIO MAURELLI**

Anno accademico 2022/23  
CdS MATEMATICA  
Codice 052AA  
CFU 6

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
ELEMENTI DI PROBABILITÀ E STATISTICA	MAT/06	LEZIONI	60	ANDREA AGAZZI MARIO MAURELLI

### Obiettivi di apprendimento

#### *Conoscenze*

Lo studente al termine del corso avrà acquisito la conoscenza dei concetti di base della probabilità e della inferenza statistica.

#### *Modalità di verifica delle conoscenze*

Lo studente sarà valutato riguardo la sua abilità di risolvere esercizi sulla probabilità elementare e sulla inferenza statistica, di formulare i risultati più importanti del corso e saperli dimostrare, di discutere i concetti principali esaminati durante le lezioni.

#### *Capacità*

Lo studente sarà in grado di comprendere argomenti elementari di probabilità e inferenza statistica. Lo studente sarà inoltre in grado di impostare e risolvere semplici problemi relativi a tali argomenti.

#### *Modalità di verifica delle capacità*

Nella prova scritta sarà verificata la capacità dello studente di risolvere semplici problemi. Nella prova orale sarà verificata la capacità di comprensione e di elaborazione degli argomenti analizzati.

#### *Comportamenti*

Il corso permetterà di affrontare semplici problemi di natura probabilistica e statistica.

#### *Modalità di verifica dei comportamenti*

Nel corso degli esami agli studenti sarà richiesto di suggerire soluzioni a semplici problemi e a fornire esempi dei concetti principali del corso.

#### *Prerequisiti (conoscenze iniziali)*

Lo studente deve avere padronanza degli argomenti degli insegnamenti di analisi, aritmetica e algebra lineare del primo anno di corso.

#### *Indicazioni metodologiche*

Il corso prevede lezioni frontali sia per la parte teorica che per la parte di esercizi. La frequenza è consigliata. Ci si aspetta che lo studente frequenti le lezioni e a questo affianchi un tempo sufficiente per lo studio individuale.

#### *Programma (contenuti dell'insegnamento)*

##### **PROBABILITÀ**

- Introduzione al concetto di probabilità. Modello di probabilità uniforme, proprietà ed esempi elementari. Modello di probabilità finita, proprietà, funzione di densità discreta. Spazi di probabilità discreti, sigma-additività e continuità della probabilità.
- Indipendenza di eventi, esempi elementari. Indipendenza di famiglie di eventi, esempi. Probabilità condizionata: definizione e esempi, probabilità condizionata e indipendenza. Formula di disintegrazione e formula di Bayes. Formula di fattorizzazione per intersezioni di eventi.
- Esempi notevoli: Esperimento a prove ripetute indipendenti, distribuzioni binomiale (numero di successi) e geometrica (istante del primo successo), moda del numero di successi, distribuzione di Poisson (legge degli eventi rari).
- Variabile aleatoria, legge. uguaglianza in legge, esistenza di una variabile aleatoria con legge assegnata (costruzione canonica). Valore atteso: definizione e proprietà. Momenti, varianza. Variabili aleatorie indipendenti: definizione, proprietà equivalenti, indipendenza di sottofamiglie di variabili aleatorie indipendenti, indipendenza di variabili aleatorie e di eventi. Covarianza. Vettori aleatori, leggi congiunte,



## UNIVERSITÀ DI PISA

distribuzioni marginali. Distribuzioni marginali dalle leggi congiunte. Correlazione: definizione e proprietà. Distribuzione condizionale, valore atteso condizionato.

- Teorema del limite centrale: enunciato e discussione. Disuguaglianza di Markov, disuguaglianza di Chebychev, legge (debole) dei grandi numeri. Conseguenze per esperimento a prove ripetute indipendenti (teorema di De Moivre-Laplace). Discussione sul tasso di convergenza, teorema (di concentrazione).
- Modello generale: Sigma algebre, spazi di probabilità. Variabili aleatorie, legge di una variabile aleatoria, funzione di distribuzione cumulata e sue proprietà. Esistenza di una variabile aleatoria assegnata una funzione di distribuzione cumulata. Funzione di distribuzione cumulata per variabili aleatorie discrete. Densità continua di probabilità. Funzione di distribuzione cumulata e densità. Funzione di distribuzione cumulata congiunta e densità continua congiunta di variabili aleatorie. Densità marginali di variabili aleatorie. Densità condizionale. Indipendenza di variabili aleatorie. Indipendenza e funzioni di distribuzione cumulate, indipendenza e densità continue. Densità della somma di variabili aleatorie indipendenti.

### STATISTICA

- Cenni sulla statistica descrittiva, indici statistici (media campionaria, moda, mediana, varianza e covarianza campionaria, quantile). Esempi motivazionali.
- Modello statistico, campione. Modello statistico generato da un campione. Stimatore, stimatore non distorto, consistenza di una successione di stimatori. Rischio quadratico di uno stimatore. Funzione di verosimiglianza, stimatori di massima verosimiglianza, esempi. Modelli esponenziali, consistenza di stimatori di massima verosimiglianza su modelli esponenziali.
- Regioni di fiducia, esempi. Stimatori pivotali. Introduzione ai test statistici. Formulazione dell'ipotesi, pianificazione dell'esperimento: regione critica, errori di prima e seconda specie, livello di un test e potenza di un test. Modelli a rapporto di verosimiglianza crescente. Lemma di Neyman-Pearson (solo enunciato). Test unilatero per modelli a rapporto di verosimiglianza crescente. Soglia di accettazione (p-value).
- Popolazioni Gaussiane, indipendenza tra media e varianza campionarie, e loro distribuzione, stimatori di massima verosimiglianza per popolazioni Gaussiane. Popolazioni Gaussiane con varianza nota: intervalli di fiducia per la media, Z-test bilatero e unilatero. Popolazioni Gaussiane con varianza non nota: intervalli di fiducia per la media, test bilatero e unilatero per la media, intervalli di fiducia per la varianza, test unilatero per la varianza.

### Bibliografia e materiale didattico

Testi consigliati:

- F. Caravenna, P. Dai Pra, *Probabilità. Una introduzione attraverso modelli e applicazioni*
- P. Baldi, *Calcolo delle probabilità e statistica.*

### Indicazioni per non frequentanti

Attraverso la pagina web del corso, tenersi al corrente del programma svolto.

### Modalità d'esame

L'esame è composto da una prova scritta e una prova orale. La prova scritta può essere eventualmente rimpiazzata da prove intermedie svolte durante il corso.

La prova scritta consiste nella risoluzione di 3-4 problemi, sviluppati su più quesiti.

La prova orale consiste in un colloquio che prevede tipicamente tre domande, volte a verificare la conoscenza dei risultati illustrati nel corso e delle loro dimostrazioni, dei concetti e delle definizioni principali, e la padronanza di tali concetti attraverso esempi illustrativi.

Ultimo aggiornamento 09/08/2022 19:33