UNIVERSITÀ DI PISA

ELEMENTI DI PROBABILITÀ E STATISTICA

MARIO MAURELLI

Anno accademico	2023/24
CdS	MATEMATICA
Codice	052AA
CFU	6

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
ELEMENTI DI PROBABILITÀ E STATISTICA	MAT/06	LEZIONI	60	MARIO MAURELLI DARIO TREVISAN

Obiettivi di apprendimento

Conoscenze

Conoscenza dei concetti di base della probabilità e della inferenza statistica. In particolare:

- Enunciare le definizioni di probabilità, condizionamento, indipendenza, le relative proprietà e i risultati collegati, con dimostrazioni ed esempi.
- Descrivere i principali esempi di probabilità/variabili aleatorie discrete e assolutamente continue e le relative proprietà.
- Illustrare i principali strumenti di analisi delle variabili aleatorie e le relative proprietà, con dimostrazioni ed esempi: legge, densità, funzione di ripartizione, leggi congiunte e marginali, indipendenza per variabili aleatorie.
- Enunciare le definizioni di valore atteso e momenti, varianza, covarianza, le relative proprietà e i risultati collegati, con dimostrazioni ed esempi.
- Enunciare i principali teoremi limite, quali legge dei grandi numeri, teorema centrale del limite, con dimostrazioni (ove previsto) ed esempi.
- Illustrare i concetti di base della statistica inferenziale e le relative proprietà, con dimostrazioni ed esempi: campione, stimatore, in particolare stimatore di massima verosimiglianza, esempi notevoli.
- Enunciare le definizioni di regione di fiducia e test di ipotesi, le relative proprietà, con dimostrazione, e gli esempi notevoli.

Modalità di verifica delle conoscenze

Nelle prove d'esame, in particolare nella prova orale, lo studente sarà valutato riguardo la sua capacità di discutere i concetti principali, formulare i risultati principali e saperli dimostrare, formulare esempi.

Capacità

Capacità di:

- comprendere ed elaborare ragionamenti elementari di probabilità e inferenza statistica;
- impostare e risolvere problemi elementari di probabilità e inferenza statistica.

(elementari = che non usano strumenti avanzati)

Modalità di verifica delle capacità

Nella prova scritta sarà verificata la capacità dello studente di risolvere problemi elementari. Nella prova orale sarà verificata la capacità di comprensione e di elaborazione di ragionamenti probabilistici e statistici.

Prerequisiti (conoscenze iniziali)

Lo studente deve avere padronanza degli argomenti degli insegnamenti di analisi, aritmetica e algebra lineare del primo anno di corso.

Indicazioni metodologiche

Il corso prevede lezioni frontali sia per la parte teorica sia per la parte di esercizi. La frequenza è consigliata. Ci si aspetta che lo studente frequenti le lezioni ed esercitazioni e a questo affianchi un tempo sufficiente per lo studio individuale.

Programma (contenuti dell'insegnamento)

Parte I: probabilità, condizionamento ed indipendenza

- Definizioni storiche di probabilità. Spazio campionario ed eventi. Sigma-algebre. Definizione di probabilità. Proprietà elementari della probabilità (complementare, unione, inclusione-esclusione). Continuità della probabilità per successioni monotone. Sigma-subadditività. Eventi quasi certi e trascurabili.
- Modello uniforme, esempi. Modelli discreti non uniformi, esempi. Modellizzazione di sequenze di esperimenti, sequenza di Bernoulli, esempi. Formule fondamentali di combinatoria: permutazioni, combinazioni, coefficiente binomiale.
- Probabilità condizionata. Formula della partizione, esempi di applicazioni. Teorema di Bayes, esempi di applicazioni.
- Indipendenza di due eventi. Proprietà dell'indipendenza (stabilità per complementazione, relazione con eventi quasi certi o trascurabili e con eventi incompatibili). Indipendenza di una famiglia di eventi, proprietà. Indipendenza a due a due non implica indipendenza: esempi. Indipendenza per prove ripetute.

Parte II: Variabili aleatorie discrete

- Probabilità su spazi discreti, densità discreta, calcoli. Grafico a barre della densità discreta. Sequenza di prove di Bernoulli indipendenti, esempi.
- Esempi notevoli di probabilità discrete, con grafico a barre e significato propabilistico: binomiale, geometrica, binomiale negativa, ipergeometrica, Poisson.
- Variabili aleatorie (v.a.) discrete. Legge di una v.a.. Costruzione canonica di una v.a.. V.a. coppia. Uguaglianza q.c. e uguaglianza in legge.
- Legge congiunta e leggi marginali (per v.a. coppia), densità congiunta e densità marginali. Densità e leggi marginali da densità e legge congiunta. Esempi. Indipendenza di v.a.. Criterio indipendenza tramite densità congiunta. Esempi. Costruzione canonica di v.a. indipendenti e probabilità prodotto. Sequenza di v.a. di Bernoulli indipendenti.
- Valore atteso. Calcolo del valore atteso con la densità discreta e dipendenza del valore atteso dalla legge. Esempi. Proprietà del valore atteso. Esempi notevoli: valore atteso di binomiale, geometrica, Poisson. Indici di centralità. Momenti. Disuguaglianza di Markov e controllo delle code.
- Varianza e deviazione standard. Esempio. Proprietà. Esempi notevoli: binomiale, geometrica, Poisson. Disuguaglianza di Chebyshev. Disuguaglianza di Schwarz.
- Valore atteso di prodotto di v.a. indipendenti. Covarianza e sua dipendenza dalla legge congiunta. Indipendenza implica non correlazione, controesempio al viceversa. Varianza della somma di v.a., in particolare nel caso v.a. non correlate. Esempio: passeggiata aleatoria simmetrica. Coefficiente di correlazione. Retta di regressione.
- a. i.i.d.. Media campionaria. Legge dei grandi numeri (LGN) debole, con dimostrazione. Estensione a caso v.a. non correlate. Esempio. LGN per frequenza relativa campionaria (v.a. binomiale). Argomento di scaling per la media campionaria. Teorema centrale del limite (TCL/TLC). Calcolo numerico dell'integrale gaussiano, probabilità di oscillazione entro 3 sigma.
- Richiami di teoria della misura. Lemma di Dynkin (criterio unicità per probabilità). Funzione di ripartizione (FdR). Bigezione tra probabilità su R e FdR. Calcolo delle probabilità di intervalli e di punti tramite FdR. FdR per probabilità discrete su R. Probabilità assolutamente continue, proprietà della densità, proprietà della FdR. Relazione tra probabilità discrete, continue e assolutamente continue.
- Esempi notevoli di probabilità assolutamente continue, con grafico densità: densità uniforme, esponenziale, Gamma, gaussiana standard e gaussiana generica.

Parte III: Variabili aleatorie generali

- Variabili aleatorie generali. Legge di una v.a. e sua FdR. V.a. indicatrice. Costruzione canonica di una v.a.. Composizione di v.a..
- Probabilità assolutamente continue su R^d. Sigma-algebra prodotto. Legge congiunta e leggi marginali. Leggi marginali da legge congiunta. Caso assolutamente continuo: densità marginali da densità congiunta. Esempio di vettore non assolutamente continuo con marginali assolutamente continue. Indipendenza di v.a.. Caso assolutamente continuo: criterio di indipendenza tramite densità. Stabilità dell'indipendenza per composizione e indipendenza di gruppi di v.a. Costruzione canonica di v.a. indipendenti e probabilità prodotto.
- Definizione di valore atteso (integrale). Proprietà del valore atteso. Lemma di Fatou, teoremi di convergenza monotona e di convergenza dominata. Estensione all'integrale di Lebesgue. Legame tra valore atteso e legge: formula. Calcolo del valore atteso: caso discreto (richiamo), caso assolutamente continuo. Valore atteso per esempi notevoli. Mediana. Momenti e disuguaglianza di Markov (richiamo). Momenti di una gaussiana standard.
- Varianza, deviazione standard, disuguaglianza di Chebyshev (richiamo). Varianza per esempi notevoli.
- Disuguaglianza di Schwarz (richiamo). Valore atteso di prodotto di v.a. indipendenti. Covarianza, coefficiente di correlazione, retta di regressione, varianza della somma (richiamo).
- Formula di cambio variabili per diffeomorfismi di v.a. assolutamente continue. Densità della somma di due v.a., formula della convoluzione. Applicazioni: riproducibilità di binomiali, Poisson, Gamma.
- Invarianza delle gaussiane per trasformazioni affini e standardizzazione. Calcoli per v.a. gaussiane tramite FdR e standardizzazione, proprietà notevoli delle gaussiane. Riproducibilità delle gaussiane. Relazione tra momenti e varianza per una gaussiana.
- Legge dei grandi numeri (LGN). Teorema centrale del limite (TCL/TLC).

Parte IV: statistica inferenziale

- Introduzione alla statistica descrittiva. Indici statistici notevoli: media e mediana campionarie, varianza campionaria, coefficiente di correlazione campionario, retta di regressione campionaria.
- Introduzione alla statistica inferenziale. Modello statistico parametrico. Campione i.i.d.. Esempi. Statistica e stimatore. Esempi notevoli: media campionaria, varianza campionaria, coefficiente di correlazione campionario; frequenza relativa come media campionaria. Stimatore corretto e asintoticamente corretto. Stimatore consistente. Rischio quadratico di uno stimatore. Esempi notevoli.
- Funzione di verosimiglianza e stimatore di massima verosimiglianza, esempi. Modello esponenziale, esempi. Consistenza dello stimatore di max verosimiglianza nei modelli esponenziali. Stimatori di max verosimiglianza per media e varianza in modelli

gaussiani.
- Regione di fiducia. Quantili. Quantili di una gaussiana e loro proprietà. Intervallo di fiducia per la media di una popolazione normale, con varianza nota. Dipendenza dell'intervallo dai parametri. Esempi. Metodo della statistica pivotale. Regioni di fiducia asintotiche. Intervalli di fiducia asintotici per la media di una popolazione, in particolare nel caso Bernoulli. Esempi.
- Legge chi-quadrato come somma dei quadrati di v.a. gaussiane standard indipendenti. Invarianza delle gaussiane standard indipendenti per isometrie. Leggi ed indipendenza di media e varianza campionarie per gaussiane standard indipendenti. Legge t-di-Student, proprietà dei suoi quantili. Legame tra t-di-Student e gaussiane. Intervalli di fiducia per la media di una popolazione gaussiana con varianza non nota. Intervalli di fiducia per la varianza di una popolazione gaussiana.
- Test statistici. Ipotesi nulla e alternativa. Regione critica e statistica di test. Errori di prima e seconda specie. Livello e potenza di un test. Test bilatero per la media di una popolazione gaussiana con varianza nota. Test bilatero per la media di una popolazione Bernoulli, per grandi campioni. Test per la media in altri casi. Metodo del p-value.
- Test di ipotesi unilateri, lemma di Neyman-Pearson, esempi notevoli.

Bibliografia e materiale didattico

Testi consigliati:

- F. Caravenna, P. Dai Pra, *Probabilità. Una introduzione attraverso modelli e applicazioni*
- P. Baldi, *Calcolo delle probabilità e statistica*.

Indicazioni per non frequentanti

Attraverso la classe MS Teams e/o Google classroom e/o la pagina e-learning del corso, tenersi al corrente del programma svolto.

Modalità d'esame

L'esame è composto da una prova scritta e una prova orale. La prova scritta può essere eventualmente rimpiazzata da prove intermedie scritte svolte durante il corso.
La prova scritta consiste nella risoluzione in dettaglio di 2, 3 o 4 problemi, sviluppati su più quesiti.
La prova orale consiste in un colloquio con alcune domande da parte del docente. Lo scopo del colloquio è verificare la conoscenza dei risultati e delle loro dimostrazioni, dei concetti e delle definizioni principali, la padronanza di tali concetti attraverso esempi illustrativi e la capacità di sviluppare ragionamenti di natura probabilistica e statistica.

Altri riferimenti web

Verrà usata almeno una tra:

- classe MS Teams
- Google classroom
- pagina e-learning del corso

Ultimo aggiornamento 24/10/2023 19:00