UNIVERSITÀ DI PISA

DINAMICA OLOMORFA

FABRIZIO BIANCHI

Anno accademico	2023/24
CdS	MATEMATICA
Codice	106AA
CFU	6

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
DINAMICA OLOMORFA/a	MAT/03	LEZIONI	42	FABRIZIO BIANCHI

Obiettivi di apprendimento

Conoscenze
Risultati principali della dinamica olomorfa di una variabile, riguardanti insiemi di Fatou e Julia e l'insieme di Mandelbrot.

Modalità di verifica delle conoscenze
La verifica dell'acquisizione delle conoscenze avverrà tramite l'esposizione orale di argomenti trattati nel corso o vicini ad argomenti trattati nel corso, esposizione che lo studente dovrà fare nell'esame orale.

Capacità
Conoscere e saper dimostrare teoremi di dinamica olomorfa.

Modalità di verifica delle capacità
L'esame orale finale comprenderà anche la presentazione di dimostrazioni di teoremi di dinamica olomorfa, in modo da verificare le abilità dimostrative acquisite.

Comportamenti
Affinare ulteriormente le proprie abilità nel seguire, verificare ed elaborare autonomamente ragionamenti matematici di media difficoltà, in particolare nel campo della dinamica olomorfa.

Modalità di verifica dei comportamenti
Tramite gli interventi in classe e la presentazione di un seminario finale su un argomento affine a quelli trattati.

Prerequisiti (conoscenze iniziali)
Le basi di analisi complessa in una variabile.

Indicazioni metodologiche
Erogazione: frontale
Attività di studio:

- seguire le lezioni
- studio individuale

Frequenza: non obbligatoria
Metodi didattici: lezioni

Programma (contenuti dell'insegnamento)
La Dinamica Olomorfa (discreta) è lo studio dei sistemi dinamici generati dall'iterazione di mappe olomorfe su varietà complesse. Ha avuto origine dal problema della linearizzazione dei germi analitici nel XIX secolo e dai lavori di Fatou e Julia all'inizio del XX secolo. È oggi un'area di ricerca molto attiva, al crocevia tra analisi complessa, teoria ergodica, teoria dei frattali e della dimensione, e con forti e fruttuose connessioni con la geometria complessa e algebrica, l'aritmetica e la teoria dei numeri, la dinamica reale, la probabilità, la geometria differenziale.
L'obiettivo di questo corso è di presentare un'introduzione a questo argomento, sia dal punto di vista locale che da quello globale. Ci concentreremo principalmente sullo studio dell'iterazione di polinomi su C e di mappe razionali sulla sfera di Riemann. In questo caso si può

decomporre lo spazio delle fasi in due parti definite dinamicamente: l'insieme di Fatou, dove le orbite sono stabili per una piccola perturbazione del punto di partenza, e l'insieme di Julia, dove una piccola perturbazione del punto dà luogo ad una cambiamento drastico nella dinamica. L'insieme Julia è un insieme frattale, cioè un insieme con notevole autosomiglianza.
Nella prima parte del corso tratteremo i seguenti argomenti:

- Famiglie normali, Teorema di Montel;
- Insiemi di Fatou e Julia: definizioni, esempi;
- Struttura dell'insieme di Fatou: linearizzazione in prossimità di punti di attrazione, componenti di Fatou, classificazione delle componenti periodiche;
- Struttura dell'insieme Julia: geometria frattale, connessione, densità di punti periodici repulsivi.

Allo stesso modo in cui si possono definire gli insiemi di Fatou e Julia considerando l'effetto sulle orbite della perturbazione del punto di partenza, si può anche studiare come, data una famiglia di mappe, la dinamica globale dipenda dalla specifica mappa. Nel caso della famiglia più semplice f_c?(z) = z^2 + c, l'insieme di Mandelbrot è l'insieme di parametri in cui la dinamica globale è molto sensibile ad una perturbazione del parametro. Anche l'insieme di Mandelbrot è un insieme frattale, particolarmente complicato: ha dimensione di Hausdorff 2, e al suo interno sono dense piccole copie dell'insieme di Mandelbrot. Una comprensione completa dell'insieme di Mandelbrot e della sua geometria non è stata ancora raggiunta ed è tra le principali questioni aperte nel campo.
In questa direzione tratteremo i seguenti argomenti:

- Famiglie olomorfe di polinomi e applicazioni razionali;
- Stabilità e biforcazioni: definizioni ed esempi;
- Caratterizzazioni di stabilità; stabilità strutturale, iperbolicità;
- Proprietà dei luoghi di biforcazione e dell'insieme di Mandelbrot.

Nell'ultima parte del corso si studieranno gli insiemi di Julia ed i luoghi di biforcazione dal punto di vista della teoria ergodica, anche mediante tecniche di teoria del potenziale. Tratteremo i seguenti argomenti:

- Funzioni subarmoniche ed elementi di teoria del potenziale nel piano
- Teoria ergodica degli insiemi di Julia: la misura di Green e le sue prime proprietà

Bibliografia e materiale didattico

- A. Beardon, Iteration of Rational Functions, Graduate Texts in Mathematics, 132, Springer-Verlag, New York, 1991.
- F. Berteloot F., V. Mayer, Rudiments de dynamique holomorphe, Paris, EDP Sciences, Les Ulis, 2001.
- L. Carleson, T. Gamelin, Complex Dynamics, Universitext: Tracts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1993.
- T.-C. Dinh, N. Sibony, Dynamics in several complex variables: endomorphisms of projective spaces and polynomial-like mappings, Lecture Notes in Math., 1998, Springer, Berlin, 2010.
- J. Milnor, Dynamics in One Complex Variable, Princeton University Press, Princeton, 2006.

Modalità d'esame

Esame orale finale con svolgimento di breve seminario su un argomento a scelta dello studente fra una lista di temi proposti dal docente.

Ultimo aggiornamento 11/12/2023 12:45