



# UNIVERSITÀ DI PISA

---

## ANALISI MATEMATICA II E CALCOLO NUMERICO

**BOZHIDAR VELICHKOV**

Anno accademico 2023/24  
CdS INGEGNERIA DELL'ENERGIA  
Codice 717AA  
CFU 12

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
ANALISI MATEMATICA II	MAT/05	LEZIONI	60	BOZHIDAR VELICHKOV
CALCOLO NUMERICO	MAT/08	LEZIONI	60	LUCA HELTAI CECILIA PAGLIANTINI

### Obiettivi di apprendimento

#### *Conoscenze*

**Modulo CALCOLO NUMERICO.** Ci si aspetta che gli studenti acquisiscano consapevolezza dei concetti e dei metodi di base nell'analisi numerica applicata per risolvere problemi elementari nell'analisi matematica e nell'algebra lineare.

**Modulo ANALISI MATEMATICA II.** Le nozioni ed i teoremi principali dell'analisi negli spazi euclidei; calcolo differenziale e integrale in più variabili.

#### *Modalità di verifica delle conoscenze*

**Modulo CALCOLO NUMERICO.** Lo studente deve dimostrare la capacità di eseguire, con consapevolezza critica, le attività illustrate o svolte sotto la guida dell'insegnante durante il corso.

Esame orale.

**Modulo ANALISI MATEMATICA II.** Esame scritto e orale.

#### *Capacità*

**Modulo CALCOLO NUMERICO.** Alla fine del corso gli studenti avranno la capacità di analizzare problemi numerici dal punto di vista computazionale e di fornire l'implementazione Matlab di algoritmi numerici.

**Modulo ANALISI MATEMATICA II.** Alla fine del corso lo studente deve essere in grado di affrontare e risolvere problemi sia di calcolo che teorici, di usare i principali strumenti analitici, di spiegare e argomentare le proprie soluzioni.

#### *Modalità di verifica delle capacità*

**Modulo CALCOLO NUMERICO.** I criteri di valutazione delle competenze si basano sulla discussione dei contenuti del corso e dell'implementazione e risultati delle sperimentazioni numeriche effettuate in Matlab, riguardanti le attività svolte in laboratorio durante il corso.

**Modulo ANALISI MATEMATICA II.** Esame scritto e orale.

#### *Comportamenti*

**Modulo CALCOLO NUMERICO.** Gli studenti raggiungeranno una sensibilità numerica in cui i concetti di stabilità e condizionamento numerici giocano un ruolo fondamentale, e dove minimizzare la complessità computazionale è una richiesta nella progettazione e nell'analisi degli algoritmi numerici.

**Modulo ANALISI MATEMATICA II.**

#### *Modalità di verifica dei comportamenti*

**Modulo CALCOLO NUMERICO.** La discussione dei contenuti del corso e dell'implementazione dei metodi numerici studiati sono ancora una volta i criteri principali per la valutazione dei comportamenti.

**Modulo ANALISI MATEMATICA II.**



## UNIVERSITÀ DI PISA

### Prerequisiti (conoscenze iniziali)

#### Modulo CALCOLO NUMERICO.

Nozioni di base di Algebra Lineare e di Calcolo.

#### Modulo ANALISI MATEMATICA II.

Nozioni di base dell'analisi di funzioni di una variabile (Analisi 1) e di Algebra Lineare, in particolare:

- successioni e limiti di successioni, teorema di Bolzano-Weierstrass;
- funzioni continue e limiti di funzioni di una variabile; teorema di Cantor;
- derivate di funzioni di una variabile; teoremi di Rolle e di Lagrange;
- integrale di Riemann - somme superiori e inferiori di Riemann; definizione di funzione integrabile secondo Riemann;
- matrici ed applicazioni lineari; autovalori ed autvettori; matrici simmetriche; determinante e polinomio caratteristico; teorema spettrale.

### Indicazioni metodologiche

#### Modulo CALCOLO NUMERICO.

Lezioni frontali

Modalità di apprendimento:

- frequentando le lezioni
- lavoro di laboratorio

Frequenza: consigliata

Metodi di insegnamento:

- lezioni
- laboratorio

#### Modulo ANALISI MATEMATICA II.

Lezioni frontali; la frequenza è consigliata.

### Programma (contenuti dell'insegnamento)

**Modulo CALCOLO NUMERICO.** Il corso fornisce nozioni sull'analisi degli errori, l'aritmetica di macchina, l'approssimazione numerica della soluzione di equazioni non lineari, metodi efficienti per la soluzione di sistemi di equazioni lineari. Il corso affronta anche le principali questioni relative all'approssimazione delle funzioni, all'integrazione numerica e alla soluzione numerica dei problemi ai valori iniziali per le equazioni differenziali ordinarie.

#### Modulo ANALISI MATEMATICA II.

##### 1. Prodotti scalari, norme e distanze. Topologia in $\mathbb{R}^n$ .

Prodotto scalare e disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. Distanza euclidea. Norme per operatori lineari. Disuguaglianza triangolare. L'insieme dei punti con coordinate razionali è denso. Convergenza di successioni. Successioni di Cauchy e completezza. Teorema di Bolzano-Weierstrass.

*Insiemi aperti e insiemi chiusi.* Insiemi aperti. Unione e intersezione di insiemi aperti. Prodotto di insiemi aperti. Unione e intersezione di insiemi chiusi. Prodotto di insiemi chiusi. Insiemi chiusi per successioni. Chiusura, parte interna e frontiera di un insieme.

*Insiemi compatti e funzioni continue.* Funzioni continue e funzioni continue per successioni. Somma, prodotto e composizione di funzioni continue. Funzioni continue su insiemi compatti. Teorema di Weierstrass.

*Insiemi connessi.* Insiemi connessi per archi. Funzioni continue su insiemi connessi.

##### 2. Derivate parziali e direzionali.

Derivabilità e differenziabilità di funzioni tra spazi euclidei. Funzioni derivabili, funzioni differenziabili. Piani tangenti a grafici. Le funzioni differenziabili sono continue. Le funzioni differenziabili sono derivabili. Esempio di una funzione derivabile, ma non continua in zero. Esempio di una funzione derivabile e continua, ma non differenziabile in zero. Funzioni  $C^1$  e  $C^2$ . Teorema del differenziale totale. Derivate parziali di ordine superiore - teoremi di Schwartz. Composizione di funzioni differenziabili. Formula per le derivate parziali della funzione composta. Matrice Hessiana.

Formula di Taylor. Massimi e minimi locali interni. Condizione necessaria al primo ordine. Punti critici. Condizione necessaria al secondo ordine. Matrici semidefinite positive e matrici semidefinite negative. Condizione sufficiente al secondo ordine. Matrici definite positive e matrici definite negative. Il ruolo del determinante della matrice Hessiana in dimensione due. Condizioni necessarie e sufficienti al primo e al secondo ordine in dimensione due. Punti di sella e matrici indefinite.

Teorema della funzione implicita (dimostrazione per funzioni di due variabili a valori reali). Teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

##### 3. Forme differenziali e integrali curvilinei.

*Forme differenziali in  $\mathbb{R}^n$ .* 1-forme, 2-forme e k-forme in  $\mathbb{R}^n$  - definizioni. Somma di forme differenziali. Prodotto di una forma differenziale con una funzione. Prodotto esterno tra forme differenziali. Differenziale di una funzione. Derivata esterna di una forma differenziale. Forme chiuse e forme esatte. Le forme esatte sono chiuse. Esempio di una forma chiusa ma non esatta.

*Integrazione di 1-forme.* Curve in  $\mathbb{R}^n$ . Curve  $C^1$  a tratti, curve chiuse, curve semplici. Curve equivalenti. L'opposta di una curva.



## UNIVERSITÀ DI PISA

Concatenamento di curve. Integrale di una 1-forma su una curva  $C^1$  a tratti. Integrazione su curve opposte. Integrazione su curve concatenate. Integrazione su curve equivalenti. Integrazione di forme esatte su curve chiuse. Caratterizzazione delle 1-forme esatte attraverso l'integrazione su curve chiuse. In un rettangolo le forme chiuse sono esatte. In un aperto stellato le forme esatte sono chiuse. Teorema della derivazione sotto il segno dell'integrale. Domini diffeomorfi. In  $\mathbb{R}^3$  il toro e la palla non sono diffeomorfi.

*Integrazione di funzioni su curve.* Integrale di una funzione continua su una curva. Integrazione su curve equivalenti. Integrazione su curve opposte. Integrazione su curve concatenate. Approssimazione dell'integrale su una curva con delle somme parziali. Lunghezza di una curva.  
4. *Integrazione in  $\mathbb{R}^n$ .*

*Integrale di Riemann.* Integrazione di Riemann su un dominio rettangolare. Partizioni di un dominio rettangolare. Somme di Riemann superiori e inferiori. Integrale di Riemann superiore e inferiore. Integrabilità di una funzione limitata su un rettangolo. Integrabilità delle funzioni continue su domini rettangolari. Teorema di Fubini su domini rettangolari. Integrale di una funzione su un insieme limitato. Integrabilità di una funzione continua su un dominio normale. Teorema di Fubini in domini normali.

*Integrazione per parti e teorema della divergenza.* Formule di Gauss-Green in domini normali. Teorema della divergenza su domini normali in dimensione due. Partizione dell'unità in domini regolari. Teorema della divergenza su domini regolari in dimensione due. Applicazione del teorema della divergenza - Laplaciano, equazione del calore, variazione della temperatura totale e flusso di calore attraverso il bordo di un insieme regolare.

*Formula di Stokes.* Teorema di Stokes su domini normali in dimensione due. Orientazione in dimensione due. Curve che parametrizzano il bordo di un insieme in senso antiorario. Formula di Stokes su domini regolari in dimensione due. Le formule di Gauss-Green come conseguenza della formula di Stokes. Diffeomorfismi e orientazione in domini bidimensionali. Cambio delle variabili in dimensione due. Integrazione in coordinate polari nel piano. Integrale della funzione Gaussiana.

*Integrazione su superfici parametriche.* Superfici parametriche in dimensione due. Superfici parametriche equivalenti. Integrale di una 2-forma su una superficie parametrica in dimensione due. Integrazione su superfici parametriche equivalenti. Formula di Stokes per le superfici. Prodotto vettoriale in dimensione tre. Divergenza e rotore di un campo in dimensione tre. Versore normale a una superficie. Versore normale su superfici equivalenti. Integrazione di funzioni su superfici. Teorema del rotore. Applicazione della formula di Stokes. Cambiamento delle variabili in integrali multipli. Integrazione in coordinate polari.

### Bibliografia e materiale didattico

#### Modulo CALCOLO NUMERICO.

La lettura consigliata include i seguenti testi:

- P. Ghelardoni, G. Gheri, P. Marzulli, "Elementi di calcolo numerico", Masson, 1993.
- D.A. Bini, M. Capovani, O. Menchi, "Metodi numerici per l'algebra lineare", Zanichelli, 1988.
- R. Bevilacqua, D.A. Bini, M. Capovani, O. Menchi, "Metodi Numerici", Zanichelli, 1992.

#### Modulo ANALISI MATEMATICA II.

Gli appunti del corso saranno pubblicati sul sito <https://people.dm.unipi.it/velichkov/teaching.html>). Altri testi utili sono: Marcellini, Sbordone - Analisi Matematica 2; Fusco, Marcellini, Sbordone - Analisi Matematica 2; Acerbi, Buttazzo - Analisi Matematica 2.

### Modalità d'esame

#### Modulo CALCOLO NUMERICO.

Prova orale

#### Modulo ANALISI MATEMATICA II.

Esame scritto e orale

### Altri riferimenti web

#### Modulo CALCOLO NUMERICO.

E-Learning di Ingegneria: calcolo numerico per Ingegneria Energetica

#### Modulo ANALISI MATEMATICA II.

<https://people.dm.unipi.it/velichkov/teaching.html>

<https://people.dm.unipi.it/velichkov/analisi2-IE-2023-2024.html>

Ultimo aggiornamento 15/09/2023 21:02