UNIVERSITÀ DI PISA

METODI NUMERICI PER EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

LUCA HELTAI

Anno accademico	2023/24
CdS	MATEMATICA
Codice	795AA
CFU	6

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
METODI NUMERICI PER EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI	MAT/08	LEZIONI	42	LUCA HELTAI

Obiettivi di apprendimento

Conoscenze
Al termine del corso:

- (Analisi Numerica e FEM) Gli studenti saranno in grado di dimostrare una conoscenza avanzata della soluzione numerica delle equazioni differenziali parziali, con particolare enfasi sui Metodi degli Elementi Finiti. Saranno capaci di esaminare criticamente e applicare vari approcci teorici e pratici per risolvere problemi complessi nei diversi domini applicativi.
- (Programmazione e Implementazione) Gli studenti acquisiranno competenze pratiche nell'uso di linguaggi di programmazione come Python e C++ per l'implementazione di algoritmi FEM, preparandoli per applicazioni avanzate nella ricerca e nello sviluppo industriale.
- (Stabilizzazione e Analisi degli Errori) Gli studenti comprenderanno i meccanismi di stabilizzazione come GLS e SUPG per equazioni di reazione-trasporto-diffusione e saranno in grado di condurre un'analisi degli errori a priori e a posteriori, implementando strategie di rifinitura adattativa della mesh basate su stime di errore.
- (Problematiche Saddle Point e Applicazioni) Saranno in grado di affrontare problemi di punto sella e applicare la teoria di Babuška-Brezzi per l'approssimazione di elementi finiti misti, con applicazioni che vanno dalle equazioni di Darcy alle equazioni di Stokes, migliorando la loro capacità di trattare una varietà di problemi PDEs in campi come la meccanica dei fluidi e la geofisica.

Questi obiettivi di apprendimento assicurano che, al termine del corso, gli studenti abbiano una comprensione approfondita e pratica dei Metodi degli Elementi Finiti e delle loro applicazioni, oltre a una solida preparazione per affrontare sfide complesse nella soluzione numerica delle PDEs.

Modalità di verifica delle conoscenze
Per valutare l'acquisizione degli obiettivi stabiliti da parte degli studenti, verranno utilizzati i seguenti metodi e/o strumenti:
Valutazione Continua: Durante il corso, la comprensione e l'applicazione dei principi dell'analisi numerica e dei metodi degli elementi finiti (FEM) da parte degli studenti verranno valutate attraverso valutazioni periodiche durante il corso. Queste possono includere compiti di programmazione pratica e presentazioni di progetti. Queste valutazioni mirano a misurare la presa degli studenti sui concetti teorici e la loro capacità di applicare questi concetti per risolvere problemi pratici.
Implementazioni Pratiche e Progetti: Gli studenti intraprenderanno progetti individuali o di gruppo che coinvolgono l'implementazione di algoritmi FEM in Python o C++. I progetti serviranno come applicazione diretta dei contenuti del corso, permettendo agli studenti di dimostrare le loro competenze di programmazione e la loro comprensione dei meccanismi di stabilizzazione, dell'analisi degli errori e dell'applicazione dei FEM a problemi reali. I progetti saranno rivisti e discussi in classe così come in incontri tra gli studenti e l'insegnante, fornendo un'opportunità per feedback e un'esplorazione più approfondita degli argomenti.
Esame Orale: Un esame orale permetterà agli studenti di articolare la loro comprensione dei contenuti del corso e dimostrare la loro capacità di integrare e applicare vari concetti appresi durante il corso.
Sessioni di Peer Review: Come parte dell'approccio di apprendimento collaborativo del corso, gli studenti parteciperanno a sessioni di peer review, presentando i loro progetti e ricevendo feedback costruttivo dai loro pari. Questo processo aiuterà gli studenti a rifinire le loro competenze analitiche, di programmazione e di presentazione, così come ad approfondire la loro comprensione della materia attraverso la discussione e la critica.

Capacità
Al termine del corso:

- Gli studenti sapranno utilizzare linguaggi di programmazione come Python e C++ per implementare algoritmi basati sui Metodi degli Elementi Finiti (FEM) per la soluzione di equazioni differenziali parziali.
- Gli studenti saranno in grado di svolgere analisi teorica e pratica delle soluzioni di problemi PDE, applicando principi di analisi numerica, comprensione delle formulazioni deboli e ben poste, e applicando teoremi di convergenza.
- Gli studenti saranno in grado di identificare e applicare tecniche di stabilizzazione appropriate, come GLS e SUPG, a problemi di reazione-trasporto-diffusione, migliorando l'accuratezza delle soluzioni numeriche.
- Gli studenti saranno in grado di condurre analisi degli errori a priori e a posteriori per valutare la qualità delle soluzioni numeriche e implementare strategie di rifinitura adattativa della mesh basate su stime dell'errore.
- Gli studenti saranno in grado di affrontare problemi di punto sella e comprendere l'applicazione della teoria di Babuška-Brezzi per l'approssimazione di elementi finiti misti, estendendo l'applicabilità dei FEM a una gamma più ampia di problemi PDE.
- Gli studenti saranno in grado di collaborare efficacemente in team, presentare i loro progetti in sessioni di peer review, e comunicare i risultati delle loro ricerche e implementazioni attraverso relazioni scritte e presentazioni orali chiare e ben organizzate.

Modalità di verifica delle capacità

Per valutare l'acquisizione delle competenze stabilite dagli studenti, verranno utilizzati i seguenti metodi e/o strumenti:

1. **Compiti di Programmazione**: Durante le sessioni di laboratorio informatico, gli studenti completeranno piccoli progetti volti a comprendere l'uso dei linguaggi di programmazione come Python e C++ per l'implementazione degli algoritmi FEM. Questi compiti valuteranno direttamente la capacità degli studenti di applicare le loro competenze di programmazione per risolvere le equazioni differenziali parziali.

2. **Attività di Analisi Pratica**: Gli studenti parteciperanno ad attività pratiche che richiedono l'analisi teorica e pratica delle soluzioni dei problemi PDE. Questo coinvolgerà l'uso dei principi di analisi numerica, formulazioni deboli e teoremi di convergenza. La capacità degli studenti di analizzare e applicare questi principi a problemi reali sarà valutata attraverso esercizi pratici e studi di caso.

3. **Relazioni di Analisi degli Errori**: Agli studenti sarà richiesto di condurre analisi degli errori a priori e a posteriori su soluzioni numeriche date. Dovranno quindi creare relazioni che dettagliano i loro risultati, le stime degli errori e le strategie di rifinitura adattativa della mesh che raccomanderebbero. Questo valuterà la loro comprensione dell'analisi degli errori e la loro capacità di applicarla praticamente.

4. **Progetti di Gruppo**: Gli studenti lavoreranno in gruppo su progetti che richiederanno la soluzione di PDEs di tipo diverso. I progetti di gruppo potranno culminare con una presentazione e/o un report comprensivo, consentendo agli studenti di dimostrare le loro abilità collaborative, le capacità di risoluzione dei problemi e la profondità di comprensione.

Questi metodi di valutazione sono progettati per fornire una valutazione comprensiva delle competenze pratiche degli studenti nella programmazione, analisi e applicazione dei metodi numerici per risolvere i PDE, così come la loro capacità di lavorare collaborativamente e comunicare efficacemente i loro risultati.

Comportamenti

Attraverso il corso, si prevede che lo studente possa acquisire i seguenti comportamenti:

- **Sensibilità alle Implicazioni Pratiche e Teoriche**: Lo studente potrà sviluppare una maggiore sensibilità e comprensione delle implicazioni pratiche e teoriche dell'analisi numerica e dei metodi degli elementi finiti, applicate a problemi reali in diversi ambiti scientifici e ingegneristici.

- **Gestione di Progetti Complessi**: Lo studente acquisirà la capacità di gestire e condurre progetti complessi, comprendendo l'importanza della pianificazione, dell'organizzazione e della gestione del tempo, in particolare nei progetti di gruppo che richiedono la collaborazione tra diversi membri del team.

- **Approccio Critico e Analitico**: Sarà incoraggiato e sviluppato un approccio critico e analitico alla risoluzione dei problemi, permettendo agli studenti di valutare in modo indipendente le soluzioni proposte, identificare le migliori strategie di risoluzione e applicare metodi di verifica e validazione delle soluzioni ottenute.

- **Capacità di Lavoro in Team**: Lo studente svilupperà competenze interpersonali e di lavoro in team, imparando a comunicare efficacemente le proprie idee e risultati, sia oralmente che per iscritto, e a collaborare con altri per raggiungere obiettivi comuni.

- **Responsabilità Etica e Professionale**: Verrà promossa la consapevolezza dell'importanza della responsabilità etica e professionale nello svolgimento di ricerche e nello sviluppo di soluzioni tecniche, includendo la considerazione delle implicazioni sociali, ambientali ed economiche delle tecnologie e delle metodologie applicate.

- **Precisione e Rigore nell'Analisi dei Dati**: Gli studenti acquisiranno opportune accuratezza e precisione nello svolgere attività di raccolta, analisi e interpretazione dei dati, sviluppando competenze nell'uso di strumenti software avanzati per l'analisi numerica e la simulazione di sistemi complessi.

Questi comportamenti mirano a preparare gli studenti non solo a diventare professionisti competenti nel campo dell'analisi numerica e dei

metodi degli elementi finiti ma anche a contribuire in modo responsabile e innovativo alla società e all'ambiente professionale in cui opereranno.

Modalità di verifica dei comportamenti

Per valutare i comportamenti acquisiti dagli studenti, verranno utilizzati i seguenti metodi e/o strumenti:

1. **Sessioni di Laboratorio**: Durante le sessioni di laboratorio, verrà valutato il grado di accuratezza e precisione delle attività svolte. Questo include la valutazione della completezza nell'analisi dei dati, l'implementazione dei metodi numerici e l'applicazione delle tecniche di stabilizzazione nei compiti di programmazione.

2. **Lavoro di Gruppo**: Durante i progetti di gruppo, verranno verificate le modalità di definizione delle responsabilità, di gestione e organizzazione delle fasi progettuali. Questa valutazione si concentrerà sulla capacità degli studenti di collaborare efficacemente, comunicare le proprie idee e contribuire al raggiungimento degli obiettivi del progetto. Verranno fornite osservazioni e feedback sulla dinamica di lavoro di squadra, sugli approcci alla risoluzione dei problemi e sulle strategie di gestione del progetto.

3. **Attività Seminariali**: Dopo le attività seminariali, agli studenti verranno richieste delle brevi relazioni concernenti gli argomenti trattati. Queste relazioni valuteranno la capacità degli studenti di sintetizzare le informazioni, articolare la propria comprensione di concetti complessi e riflettere criticamente sul contenuto del seminario.

4. **Presentazioni Orali**: Le capacità di presentazione orale degli studenti verranno valutate durante le presentazioni dei progetti e le sessioni di peer review. Questo includerà la valutazione della loro capacità di presentare il proprio lavoro in modo chiaro e coerente, rispondere efficacemente alle domande e interagire costruttivamente con il feedback.

5. **Relazioni Scritte**: Sarà valutata la qualità delle relazioni scritte presentate dagli studenti per i loro progetti. Questo comporterà valutare la chiarezza della comunicazione, la profondità dell'analisi, il rigore nella presentazione delle soluzioni e dei risultati, e la capacità di argomentare e giustificare le proprie scelte e conclusioni.

6. **Feedback tra Pari**: Durante le sessioni di peer review, gli studenti forniranno e riceveranno feedback sui loro progetti. Questo processo valuterà la capacità degli studenti di impegnarsi in una critica costruttiva, dimostrare apertura al feedback e incorporare i suggerimenti nel loro lavoro.

Questi metodi di valutazione sono progettati per valutare in modo esaustivo l'acquisizione dei comportamenti desiderati dagli studenti, inclusi le competenze tecniche, il lavoro di squadra, la comunicazione e la responsabilità etica e professionale.

Prerequisiti (conoscenze iniziali)

Per seguire il corso in modo proficuo, gli studenti dovrebbero possedere le seguenti conoscenze e abilità:
Conoscenze

1. **Matematica di Base**: Comprendere i principi fondamentali di algebra, geometria e calcolo differenziale e integrale. Questo include una buona padronanza delle funzioni, delle derivate, degli integrali e delle serie.

2. **Analisi Matematica**: Avere una solida comprensione dell'analisi matematica, in particolare riguardo ai concetti di limiti, continuità, e sviluppi in serie di Taylor, che sono fondamentali per l'apprendimento delle formulazioni deboli delle PDEs.

3. **Algebra Lineare**: Conoscere i concetti di base dell'algebra lineare, inclusi vettori, matrici, sistemi di equazioni lineari, autovalori e autovettori, che sono essenziali per la comprensione della discretizzazione e della soluzione numerica delle PDEs.

Abilità/Capacità

1. **Competenze di Programmazione**: Avere familiarità con almeno un linguaggio di programmazione, preferibilmente Python o C++, poiché il corso include componenti pratiche di implementazione degli algoritmi FEM.

2. **Capacità di Risoluzione dei Problemi**: Essere in grado di applicare un approccio logico e critico alla risoluzione di problemi matematici e ingegneristici. Questo include la capacità di formulare ipotesi, svolgere deduzioni logiche e applicare metodi matematici per trovare soluzioni.

3. **Abilità Analitiche e Critiche**: Possedere la capacità di analizzare testi scientifici e articoli di ricerca, comprendendo e valutando criticamente i metodi e i risultati presentati.

Altre Competenze Utili

1. **Fondamenti di Equazioni Differenziali**: Avere una conoscenza di base delle equazioni differenziali ordinarie (ODE) e delle equazioni differenziali parziali (PDE), comprese le loro formulazioni e metodi di soluzione classici.

2. **Conoscenze di Fisica o Ingegneria**: Per gli studenti provenienti da corsi di studio in fisica o ingegneria, è utile avere una comprensione dei principi fisici che spesso sono alla base dei problemi modellati con le PDEs.

Questi prerequisiti non solo facilitano l'apprendimento durante il corso ma anche permettono agli studenti di impegnarsi più profondamente con

il materiale didattico, partecipare attivamente alle discussioni e ai laboratori, e ottenere il massimo beneficio dal corso.

Corequisiti

Nessuno.

Prerequisiti per studi successivi

Nessuno.

Indicazioni metodologiche

Modalità di Erogazione delle Lezioni

- **Lezioni**: Condotta alla lavagna o con l'ausilio di diapositive PowerPoint quando necessario, video e dimostrazioni dal vivo per spiegare chiaramente concetti complessi. Gli aspetti teorici saranno interconnessi con applicazioni pratiche per migliorare la comprensione.
- **Uso di Ausili Visivi**: Ampio uso di ausili visivi inclusi slide, video illustrativi e simulazioni in tempo reale per spiegare meglio i metodi degli elementi finiti e le loro applicazioni.

Esercitazioni in Aula/Laboratorio

- **Formazione dei Gruppi**: Gli studenti formeranno gruppi per le sessioni di laboratorio, incoraggiando la collaborazione e l'apprendimento tra pari.
- **Utilizzo dell'Aula Informatica**: Le esercitazioni di laboratorio verranno condotte in aule informatiche, dotate del software necessario per l'analisi FEM. Ove possibile, si incoraggiano gli studenti a usare i propri computer personali per installare e utilizzare ambienti di programmazione e strumenti pertinenti.
- **Progetti Pratici**: Enfasi sull'implementazione pratica dei concetti appresi attraverso esercizi di codifica in Python o C++, e l'uso del software FEM.

Strumenti di Supporto

- **Siti Web e Risorse Online**: Siti web consigliati, tutorial online e seminari integreranno i materiali didattici.
- **Piattaforma Elearning**: Il sito elearning del corso fungerà da hub centrale per il download dei materiali didattici, la comunicazione tra studenti e docente, la pubblicazione di test per esercitazioni a casa e la formazione di gruppi di lavoro.

Interazione Studente-Docente

- **Orario di Ricevimento**: Incontri programmati e politiche di porta aperta per affrontare quesiti individuali e fornire feedback sui compiti.
- **Email e Strumenti di Comunicazione**: Uso attivo dell'email e, possibilmente, altre piattaforme di comunicazione (es. forum sulla piattaforma elearning) per domande al di fuori delle ore di lezione.

Progetti Didattici e Valutazioni

- **Progetti Didattici**: Integrazione dell'apprendimento basato su progetti per incoraggiare l'applicazione dei metodi numerici alla soluzione di problemi del mondo reale.

Lingua di Istruzione

- **Approccio Bilingue**: A seconda del pubblico, il corso potrebbe essere condotto parzialmente o interamente in inglese, specialmente per la terminologia tecnica e la letteratura scientifica.

Questo approccio multifacettato mira a dotare gli studenti di una profonda comprensione dei metodi numerici per le PDE, abilità pratiche in FEM e la capacità di applicare queste tecniche per risolvere problemi ingegneristici complessi, garantendo un'esperienza di apprendimento ricca e coinvolgente.

Programma (contenuti dell'insegnamento)

Preliminari

- **Ripasso sugli Elementi di Analisi Funzionale**: Introduzione agli Spazi di Lebesgue, Spazi di Sobolev e disuguaglianze chiave. Esempi applicati che dimostrano la loro rilevanza nella risoluzione di problemi reali.
- **Ripasso sugli Elementi di Analisi Numerica**: Nozioni di base su interpolazione, quadratura, tensorizzazione e la loro importanza nel FEM. Introduzione alle maglie e concetti fondamentali di algebra lineare per il FEM.

Formulazioni Deboli e Ben Poste

- **Proprietà Continue**: Formulazione Debole dei Problemi Modello, Lemma di Lax–Milgram e Teorema di Banach–Ne?as–Babuška (BNB).
- **Approssimazione di Galerkin**: Comprensione della ben postezza discreta, Lemma di Cèa e stime di errore di base.

Introduzione agli Elementi Finiti

- **Elementi Finiti Locali**: Studio dettagliato degli elementi finiti come triple e quadruple, regolarità della forma per maglie affini e laboratori pratici con software FEM.
- **Interpolazione degli Elementi Finiti**: Lemma di Deny-Lion, Lemmi di Bramble–Hilbert e errori di interpolazione, inclusi sessioni di

implementazione software.

Disuguaglianze Inverse e Funzionali

- **Disuguaglianze Locali e Globali**: disuguaglianze inverse nelle celle e sulle facce, comprensione degli spazi spezzati, salti e disuguaglianze funzionali nelle maglie.

Analisi degli Errori a Priori

- **Problema Modello e Analisi degli Errori**: Problemi ellittici con condizioni al contorno di Dirichlet/Robin/Neumann, regolarità ellittica e analisi degli errori in 1H1 e 2L2.

Meccanismi di Stabilizzazione

- **Equazioni di Diffusione-Trasporto-Reazione**: ben postezza, diffusione in linea, GLS e SUPG, illustrando la loro necessità ed efficacia.

Analisi degli Errori A-posteriori e Adattività

- **Stima degli Errori e Adattività**: Implementazione di strategie di affinamento adattativo della maglia basate su stime degli errori a-posteriori nei compiti di programmazione.

Crimini Variationali

- **Analisi degli Errori per Crimini Variationali**: Analisi degli effetti dell'integrazione numerica e Lemmi di Strang.

Galerkin Discontinuo

- **Metodo di Nitsche e SIP**: metodi di Galerkin discontinui, stabilità, ben postezza e analisi degli errori.

Problemi di Punto Sella Astratti

- **Problemi di Punto Sella e Approssimazione di Elementi Finiti Misti**: Teorema di Babuška–Brezzi, formulazioni miste e approssimazioni di elementi finiti misti.

Darcy e Stokes

- **Moduli Applicativi**: Moduli specializzati sulle equazioni di Darcy e Stokes, concentrandosi su formulazioni miste, elementi finiti ()H(div) e coppie stabili per le equazioni di Stokes, culminando in un progetto collaborativo.

Progetti e Seminari

- **Presentazioni degli Studenti**: Progetti software (possibilmente in gruppi), seminari e presentazioni degli studenti.

Bibliografia e materiale didattico

1. **The Finite Element Method for Elliptic Problems**
   Author: Philippe G. Ciarlet (1978)

2. **Theory and Practice of Finite Elements**
   Authors: Alexandre Ern, Jean-Luc Guermond (2004)
   Access the book on Springer

3. **The Mathematical Theory of Finite Element Methods**
   Authors: Susanne C. Brenner, L. Ridgway Scott (2008)
   Access the book on Springer

4. **Mixed Finite Element Methods and Applications**
   Authors: Daniele Boffi, Franco Brezzi, Michel Fortin (2013)
   Access the book on Springer

Additional Resources

- **Video Lectures for "MATH 676: Finite element methods in scientific computing"**
  Lecturer: Wolfgang Bangerth
  Watch the lectures

Modalità d'esame

L'esame è composto da una prova orale (obbligatoria) e da una prova pratica (opzionale) che può consistere nella presentazione seminariale di materiale legato al corso, concordato con il docente, o nello svolgimento di un progetto (anche in piccoli gruppi), con relativo report associato. In assenza di prova pratica e/o presentazione *lo studente non può raggiungere la lode*.

Modalità Operative dell'Esame

- **Prova Pratica**: La prova pratica è opzionale e deve essere concordata con il docente. Gli studenti possono scegliere di presentare un progetto, realizzato individualmente o in piccoli gruppi, che includa lo sviluppo e l'implementazione di algoritmi FEM, analisi di dati o soluzione di problemi specifici utilizzando le tecniche apprese durante il corso. Alternativamente, possono optare per una

presentazione seminariale su argomenti specifici del corso. Il lavoro svolto dovrà essere documentato in un report che sarà valutato come parte dell'esame.

- **Prova Orale**: L'esame orale è obbligatorio per tutti gli studenti. Consiste in un colloquio tra lo studente e il docente (e possibilmente altri collaboratori del docente) dove verranno discusse le tematiche trattate durante il corso. Durante la prova orale, potrebbe essere richiesto allo studente di risolvere problemi o esercizi scritti, dimostrando la capacità di applicare concretamente le conoscenze acquisite.

Stage e tirocini
Non previsti.

Pagina web del corso
https://luca-heltai.github.io/nmpde

Altri riferimenti web

- **Moodle:**
  https://elearning.dm.unipi.it/course/view.php?id=696

- **Github repository:**
  https://github.com/luca-heltai/nmpde

Ultimo aggiornamento 16/02/2024 14:34