UNIVERSITÀ DI PISA

METODI TOPOLOGICI IN ANALISI GLOBALE

ANTONIO MARINO

Anno accademico	2018/19
CdS	MATEMATICA
Codice	068AA
CFU	6

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
METODI TOPOLOGICI IN ANALISI GLOBALE	MAT/05	LEZIONI	48	ANTONIO MARINO

Obiettivi di apprendimento

Conoscenze
Scopo del corso è offrire agli studenti una prospettiva e strumenti di "Analisi globale" ("Global Analisys"), con l'introduzione dei principali metodi topologici della moderna "Analisi non lineare" ("Nonlinear analysis"), perché siano in grado di inquadrare e studiare problemi 'globali' fra analisi, geometria e fisica matematica. Fra le strutture logico-matematiche che presiedono il mondo fisico vengono proposte alcune fondamentali strutture topologiche sottese ai fenomeni "non lineari".

Modalità di verifica delle conoscenze
Con questi studenti che hanno già una certa iniziale maturità matematica e sono molto motivati dato che scelgono liberamente un corso impegnativo, è possibile svolgere un colloquio costante durante tutto il corso, non solo nelle esercitazioni ma anche durante le lezioni. È così possibile far emergere i diversi gradi della formazione raggiunta e promuovere un livello universitario adeguato.

Capacità
Agli studenti viene così offerta concretamente la possibilità di saper inquadrare certi problemi 'globali' fra analisi, geometria e fisica matematica, e di studiarli con l'approccio metodologico appreso. Si intende incoraggiare gli studenti ad affrontare i problemi con apertura mentale senza limitarsi agli schemi che già conoscono.

Modalità di verifica delle capacità
La verifica delle capacità avviene nel costante colloquio, con studenti che possono già essere chiamati collaborare al corso, durante le le lezioni, le esercitazioni, e naturalmente attraverso l'esame finale.

Comportamenti
Il corso richiede impegno, vivo interesse, curiosità e anche il ricorso a una certa 'creatività matematica'. Gli studenti che lo scelgono sono già ben motivati.

Modalità di verifica dei comportamenti
La verifica si svolge naturalmente durante il corso, nel quale viene incoraggiato un costante colloquio, e ovviamente durante l'esame.

Prerequisiti (conoscenze iniziali)
E` necessario aver assimilato le nozioni di Analisi Matematica fornite nei corsi dei primi due anni e le collegate nozioni elementari di algebra lineare e di topologia elementare.

Indicazioni metodologiche
L'incoraggiamento alla analisi critica e alla ricerca di strutture logiche unificanti, nello studio del filo logico, progressivamente emerso nel Novecento, che collega numerosi importanti problemi di analisi non lineare di tipo globale.

Programma (contenuti dell'insegnamento)

Il corso verte su alcuni fondamentali teoremi "globali" fra analisi e geometria, particolarmente importanti nella moderna "analisi non lineare". Il "grado" e lo strumento matematico che permette di affrontare questi teoremi e molti problemi "non lineari", inserendoli in una struttura logica unitaria. Problemi di questo tipo saranno effettivamente affrontati, comprese alcune "applicazioni" (facoltative) di tipo fisico-matematico collegate ai grandi "principii variazionali" esistenti in natura.
Per coloro che vogliono farsi una idea più concreta del corso **vediamo ora qualche dettaglio esplicativo sul programma** che mostra qualcuno dei concetti e dei risultati inseriti in una stessa struttura logica.
- Definizione del grado modulo 2 e studio delle sue proprietà.
- Teorema Se A è un sottoinsieme aperto e limitato di RN e F è una mappa continua della chiusura di A in RN tale che F(x) = x per ogni x del bordo di A, allora F(A) contiene A.
- Teorema del punto fisso di Brouwer (L. E. J. Brouwer 1881 - 1966):
Se K è uno spazio topologico compatto omeomorfo ad una palla chiusa in RN e se F è una applicazione continua di K in sé, allora esiste x in K tale che F(x) = x.
- Teorema Se A è un sottoinsieme aperto e limitato di RN, il bordo di A non è contrattile in sé.
- Definizione del grado come intero relativo e studio delle sue proprietà.
- Teorema (Autovalori non lineari - 1)
Se N è dispari allora per ogni mappa continua della sfera S di RN in RN esistono x in S e a in R tale che F(x) = a x.
Per esempio: Una palla di pelouche non è "pettinabile".
- Teorema di Borsuk-Ulam (K. Borsuk, 1905 - 1982; S. Ulam, 1909 - 1984)
Se A è un sottoinsieme aperto di RN, che contenga l'origine e sia limitato e simmetrico rispetto ad essa, e se F è una mappa continua del bordo di A in un sottospazio proprio di RN, allora esiste x in nel bordo di A tale che F(x) = F(-x).
Per esempio: se si schiaccia un pallone esistono due sui punti esattamente opposti che finiscono nello stesso punto.
- Elementi basilari del Calcolo della Variazioni non lineare, e alcuni teoremi tipici, fra i quali:
- Il teorema della sella e il teorema di linking
- Alcuni invarianti topologici nel Calcolo delle Variazioni non lineare. In particolare il 'genere' e la 'categoria' di Lusternik e Schnirelman. Alcune conseguenze, fra le quali:
- Teorema (Autovalori non lineari - 2)
- Se F è una mappa continua e dispari definita sulla sfera S di RN, che sia gradiente di una funzione reale e 'pari' f , esistono x1, x2, ... xN in S e a1, ... aN in R tali che F(xi) = ai xi.(Con la stessa struttura logica del genere viene mostrato un enunciato ben più generale.)
Il programma prevede infine la scelta fra due argomenti:
1 - La proprieta moltiplicativa del grado e alcuni suoi sviluppi, fra i quali:
- Teorema della applicazione aperta: se F è una applicazione iniettiva e continua dell'insieme aperto A in RN a valori in RN allora F manda aperti in aperti.
- Teorema di Jordan in RN (versione di Jean Leray) Due compatti omeomofi, K e L, in RN dividono lo spazio nello stesso numero, finito o no, di componenti connesse limitate.
In particolare se K è la sfera, allora RN \ L ha due e due sole componenti connesse, una limitata e l'altra no.
2 - Esempi elementari nello studio dell'equazione della dinamica, riguardo alle traiettorie di un punto materiale in un campo conservativo.
Questi risultati vengono inquadrati e ottenuti nell'ambito del Calcolo delle Variazioni non lineare.

Bibliografia e materiale didattico

Testo consigliato: dispense del corso.
Testi utili per ulteriori prospettive in "Analisi non lineare":
- Jacob T. Schwartz, "Nonlinear Functional Analysis", Gordon and Breach
- Michael Struwe, "Variational Methods", Springer
- Jean Mawhin, Michel Willem, "Critical Point Theory and Hamilton Systems", Springer-Verlag
- Ladyzhenskaya Ural'tseva, "Linear and Quasilinear Elliptic Equations", Academic Press (è un libro degli anni '60 ma molto istruttivo per chi volesse constatare la forza dei metodi topologici nello studio dei problemi dierenziali non lineari)

Indicazioni per non frequentanti

Le dispense del corso sono scritte con marcato scopo didattico, cercando di fare qualche cenno ai "significati" degli argomenti in una prospettiva generale. Ma chi non potesse frequentare regolarmente il corso è vivamente consigliato di rivolgersi di frequente al titolare per avere, oltre alle eventuali spiegazioni tecniche, una verifica della propria padronanza del senso e della prospettiva del suo studio.

Modalità d'esame

L'esame è costituito dalla prova orale che consiste in una approfondita discussione nell'ambito degli argomenti considerati nel corso, volta a sondare la comprensione della materia e la acquisita maturazione scientifica.
In particolare in questa occasione gli studenti sono incoraggiati a esplicare la propria autonomia di riflessione e di ricerca, al cui sviluppo tutto lo svolgimento del corso è orientato.

Ultimo aggiornamento 01/10/2018 19:37