



# UNIVERSITÀ DI PISA

## ALGEBRA LINEARE

---

FRANCESCA ACQUISTAPACE

|                 |                         |
|-----------------|-------------------------|
| Anno accademico | 2020/21                 |
| CdS             | INGEGNERIA DELL'ENERGIA |
| Codice          | 521AA                   |
| CFU             | 6                       |

|                 |           |         |     |                                                           |
|-----------------|-----------|---------|-----|-----------------------------------------------------------|
| Moduli          | Settore/i | Tipo    | Ore | Docente/i                                                 |
| ALGEBRA LINEARE | MAT/03    | LEZIONI | 60  | FRANCESCA<br>ACQUISTAPACE<br>VINCENZO MARIA<br>TORTORELLI |

### Obiettivi di apprendimento

#### Conoscenze

Nozioni di Geometria Analitica nel piano e nello spazio.  
Spazi vettoriali ed applicazioni lineari  
L'algebra delle matrici  
Determinanti  
Autovalori ed autovettori, criteri di diagonalizzabilità.  
Il teorema spettrale (per il prodotto scalare euclideo in  $\mathbb{R}^n$ ).

#### Modalità di verifica delle conoscenze

Esame orale

#### Capacità

Sapersi muovere con le matrici e i sistemi lineari. Riconoscere dipendenza e indipendenza lineare.  
Saper dimostrare teoremi semplici ed avere consapevolezza se l'argomento usato prova o non prova.

#### Modalità di verifica delle capacità

Esame scritto e orale

#### Prerequisiti (conoscenze iniziali)

Le quattro operazioni.

#### Programma (contenuti dell'insegnamento)

##### Geometria analitica

Rette e piani nello spazio a tre dimensioni e loro posizioni reciproche  
Ortogonalità e parallelismo Proiezioni ortogonali.  
Prodotto scalare e sua bilinearità. Estensione del prodotto scalare a  $\mathbb{R}^n$ .

##### Sistemi lineari

Matrice dei coefficienti.  
Definizione di soluzione.  
La matrice  $A$  come applicazione di  $\mathbb{R}^q$  in  $\mathbb{R}^p$  che associa a  $X$  in  $\mathbb{R}^q$  il vettore di  $\mathbb{R}^p$  che è combinazione lineare delle colonne di  $A$  con coefficienti le coordinate di  $X$ .  
Le soluzioni come intersezione di iperpiani.  
Operazioni di Gauss. Esse non cambiano l'insieme delle soluzioni.  
Riduzione a scala con il metodo di Gauss.  
Variabili libere e pivots. Esempi.  
Spazi vettoriali  
Struttura di  $\mathbb{R}^n$ ,  
Spazi vettoriali, esempi:  $\mathbb{R}[x]$ , matrici, funzioni da  $A$  a  $\mathbb{R}$ , Funzioni continue sull'intervallo  $[0, 1]$ .  
Sottospazi. Soluzioni di un sistema omogeneo come sottospazio di  $\mathbb{R}^q$ .



## UNIVERSITÀ DI PISA

---

Combinazioni lineari, dipendenza e indipendenza lineare.

$W$  è sottospazio se e solo se è chiuso per combinazioni lineari.

Span di una famiglia di vettori (anche infinita).

Base di uno spazio vettoriale.

Una base è un insieme massimale di vettori indipendenti e un insieme minimale di generatori.

Teorema del completamento.

Teorema: ogni spazio vettoriale ha una base. Prova solo per spazi  $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_k\}$ .

Base = vettori indipendenti tra i vettori  $\{v_1, \dots, v_k\}$ .

Sottospazi, calcolo di basi, in particolare dello spazio di soluzioni di un sistema omogeneo.

Intersezione e somma di sottospazi.

Teorema di Grassman,

Somme dirette, supplementari, esempio un sottospazio ed il suo ortogonale.

Azione di una matrice a  $p$  righe e  $q$  colonne su  $\mathbb{R}^q$ .

Applicazioni lineari.

Le applicazioni lineari di  $\mathbb{R}^q$  in  $\mathbb{R}^p$  sono matrici a  $p$  righe e  $q$  colonne.

Dati valori in  $W$  a una base di  $V$ , c'è un'unica applicazione lineare di  $V$  in  $W$  con quei valori.

Nucleo e Immagine di una applicazione lineare.

Struttura lineare dell'insieme di applicazioni lineari tra  $V$  e  $W$ .

Teorema della dimensione. Rango di un'applicazione lineare.

$A$  e la sua trasposta hanno lo stesso rango.

Isomorfismo tra  $L(V, W)$  e lo spazio delle matrici di giusta stazza.

Applicazione ai sistemi lineari: le equazioni sono elementi di  $L(\mathbb{R}^q, \mathbb{R})$  e le operazioni di Gauss calcolano una base dello span di questi elementi.

Matrice associata a  $\text{Id} : V \rightarrow V$ .

Prodotto di matrici righe per colonne corrisponde alla composizione.

Regole del prodotto (distributività a destra e a sinistra, moltiplicazione per un numero).

Unicità dell'inversa di una matrice quadrata di rango massimo.

Calcolo dell'inversa con il metodo di Gauss.

Inversa di un prodotto, trasposta di un prodotto. Inversa della trasposta di una matrice invertibile.

Teorema: nello spazio delle matrici quadrate  $n \times n$  le matrici non invertibili sono divisori di zero a destra e a sinistra.

Determinanti

Determinanti nel caso  $2 \times 2$ .

Proprietà richieste: linearità sulle righe, annullarsi se due righe sono uguali, valore 1 su  $I$ .

Conseguenze delle proprietà richieste: valore obbligato su matrici diagonali, su matrici triangolari superiori e quindi sulle matrici a scala.

Unicità del determinante.

Esistenza (con la regola di Laplace per colonna).

Si può fare per righe.  $d(A) = d(A^T)$ .

Teorema di Binet.

Endomorfismi di uno spazio vettoriale

Classe di similitudine di una matrice quadrata.

Il centro di  $GL(n, \mathbb{R})$ .

Autovettori ed autovalori.

Polinomio caratteristico e sua invarianza per similitudine.

Traccia e determinante sono invarianti per similitudine.

Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore. Criterio di diagonalizzazione.

Il polinomio minimo. Criterio di diagonalizzazione tramite polinomio minimo.

Triangolabilità. Matrici nilpotenti.

Prodotto scalare e matrici

Matrici ortogonali, caratterizzazione. Il caso  $n = 2$  e  $n = 3$ .

Tutti gli autovalori (reali e complessi) di una matrice ortogonale hanno modulo 1.

Decomposizione di  $\mathbb{R}^n$  in somma diretta ortogonale di spazi invarianti per una applicazione ortogonale.

Matrici simmetriche.

Teorema spettrale:  $A$  è simmetrica se e solo se in  $\mathbb{R}^n$  c'è una base ortonormale di autovettori per  $A$ .

### Bibliografia e materiale didattico

M. Abate Algebra lineare (o qualsiasi libro di Algebra lineare che copra gli stessi argomenti)

Dispense e scritti di esame

<http://people.dm.unipi.it/acquisti/didattica/Ingegneria/>

Sito delle esercitazioni con collezioni di esercizi, e a cui iscriversi con le credenziali di Ateneo per ricevere avvisi

<https://elearn.ing.unipi.it/course/view.php?id=1940>

### Indicazioni per non frequentanti

La frequenza è caldamente consigliata. Chi non può frequentare può studiare sul libro di testo e sulle dispense in rete.

Sarebbe opportuno frequentare il ricevimento anche su appuntamento via mail.



## UNIVERSITÀ DI PISA

---

Isciversi al sito delle esercitazioni per avvisi

<https://elearn.ing.unipi.it/course/view.php?id=1940>

Consultare il registro delle lezioni

<https://unimap.unipi.it/registri/dettregistriNEW.php?re=3309873:::;&ri=8159>

### Modalità d'esame

Esame scritto ed orale. E' ammesso all'orale chi prende la sufficienza nella prova scritta. L'orale può essere dato anche in un appello successivo entro i limiti dell'anno in corso, cioè entro l'appello di Settembre.

### Altri riferimenti web

Sito delle esercitazioni

<https://elearn.ing.unipi.it/course/view.php?id=1940>

*Ultimo aggiornamento 22/09/2020 16:21*