UNIVERSITÀ DI PISA

ANALISI REALE

VALENTINO MAGNANI

Anno accademico	2021/22
CdS	MATEMATICA
Codice	740AA
CFU	6

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
ANALISI REALE	MAT/05	LEZIONI	48	VALENTINO MAGNANI

Obiettivi di apprendimento

Conoscenze

Risultati principali di teoria della misura e dell'integrazione in spazi mensurali, includendo il teorema di Carathéodory per misure esterne, il teorema di estensione di Carathéodory-Hahn, l'integrale su spazi mensurali, i teoremi di Fatou, Beppo Levi e di Lebesgue con il confronto rispetto la teoria di Riemann, il lemma di Hahn, il teorema di decomposizione di Jordan ed il teorema di Radon-Nikodym. Studio delle misure boreliane, di Radon, di Carathéodory e di Hausdorff. Conoscenza dei teoremi di Lusin e di Egorov. Teorema di rappresentazione di Riesz in spazi localmente compatti. Misure prodotto, teorema di Tonelli e di Fubini su spazi mensurali. Spazi di Lebesgue astratti, loro proprietà basilari, misure a valori in uno spazio di Banach e integrale di Bochner. Teoremi di ricoprimento di Vitali, differenziabilità quasi ovunque delle funzioni monotone, funzioni assolutamente continue e a variazione limitata in spazi metrici, caratterizzazione delle funzioni assolutamente continue tramite il teorema fondamentale del calcolo.

Modalità di verifica delle conoscenze

La verifica dell'apprendimento avviene tramite un'unica prova orale che verte su tutto il programma d'esame. Qui sono richiesti i risultati del corso e la capacità di saperli esporre e dimostrare, affrontando eventuali esercizi.

Capacità

Lo studente avrà acquisito la padronanza dei principali risultati di Analisi Reale, con il rigore necessario per un loro corretto utilizzo in diversi campi della Matematica, quali ad esempio l'Analisi Funzionale, la Teoria delle Probabilità e la Teoria Geometrica della Misura.

Modalità di verifica delle capacità

Tutti i risultati del corso sono sviluppati all'interno del corso stesso, ricorrendo solo occasionalmente a enunciati senza dimostrazioni, i quali saranno comunque accompagnati da una precisa bibliografia. La verifica delle capacità richiede che lo studente sia in grado di ricostruire il risultato più complesso partendo dai suoi elementi più semplici. La capacità di risolvere eventuali esercizi rafforzerà tale verifica.

Comportamenti

Lo studente sarà in grado di continuare, anche autonomamente, il percorso formativo nel campo dell'Analisi Reale, incentrandosi anche sugli sviluppi più avanzati.

Modalità di verifica dei comportamenti

La verifica della comprensione e delle applicazioni dell'Analisi Reale avviene nella valutazione della corretta esposizione dei teoremi e delle loro dimostrazioni, nonché nell'affrontare eventuali esercizi.

Prerequisiti (conoscenze iniziali)

Il corso non richiede particolari prerequisiti, se non la conoscenza dei numeri reali, le operazioni insiemistiche elementari e la nozione di funzione. D'altra parte la comprensione di esempi, esercizi ed applicazioni è facilitata dall'aver seguito corsi di Analisi Matematica del primo e del secondo anno. Saranno utili anche le nozioni basilari riguardanti spazi vettoriali, spazi di Banach e operatore lineari.

Indicazioni metodologiche

Il corso è costituito da lezioni in modalità mista, ovvero sia in presenza che online. Sebbene le lezioni sostanzialmente esauriscono il programma del corso, lo studente è invitato a integrarle anche con gli esercizi dati a lezione e l'ausilio dei testi consigliati. La frequenza è fortemente raccomandata.

Programma (contenuti dell'insegnamento)

1. **Misure e misure esterne**. Spazi mensurali, misure esterne e proprietà basilari, teorema di Carathéodory per misure esterne, funzioni misurabili e loro approssimazione, misura di Lebesgue, insiemi non misurabili, algebre, anelli e semianelli di insiemi, estensione di Carathéodory-Hahn.
2. **Teoria dell'integrazione astratta e spazi di Lebesgue.** Integrale di Lebesgue su uno spazio mensurale, teoremi di Beppo Levi, Fatou e Lebesgue. Continuità e derivabilità di integrali rispetto ad un parametro. Proprietà basilari degli spazi di Lebesgue rispetto una misura μ e loro completezza. Convergenza nella norma delle funzioni p-sommabili, convergenza puntuale q.o., convergenza in misura e relative implicazioni. Disuguaglianza di Jensen.
3. **Operazioni sulle misure.** Misure con segno, teorema di Hahn e decomposizione di Jordan per misure con segno, variazione totale, assoluta continuità dell'integrale e teorema di Radon-Nikodym.
4. **Misure e topologia.** Misure boreliane, approssimazione di boreliani con aperti, chiusi e compatti, criterio di Carathéodory per misure boreliane, misure di Radon su spazi topologici, teorema di Lusin e densità delle funzioni continue nello spazio delle funzioni p-sommabili. Teorema di rappresentazione di Riesz per funzionali sullo spazio delle funzioni continue a supporto compatto.
5. **Teoremi di Fubini e di Tonelli.** Prodotto di misure, teoremi di Fubini e di Tonelli su spazi mensurali, con controesempi per ipotesi più deboli.
6. **Funzioni assolutamente continue e a variazione limitata.** Teoremi di ricoprimento di Vitali, differenziabilità quasi ovunque delle funzioni monotone, funzioni a variazione limitata e funzione di Cantor. Funzioni assolutamente continue e loro caratterizzazione tramite il teorema fondamentale del calcolo.
7. **Misura di Hausdorff, frattali e formula di area.** Misura di Haudorff e dimensione di Hausdorff, esempi di calcolo della dimensione di Hausdorff per frattali, mappe holderiane e misura di Hausdorff, uguaglianza tra misura di Hausdorff e misura di Lebesgue, formula dell'area e cambiamento di variabile nello spazio euclideo.
8. **Argomenti opzionali, I.** Integrale di Lebesgue su spazio mensurale tramite opportune somme superiori e inferiori. Differenze tra integrazione secondo Lebesgue e integrazione secondo Riemann. Caratterizzazione delle funzioni integrabili secondo Riemann.
9. **Argomenti opzionali, II.** Misure vettoriali, integrale di Bochner e controesempi al teorema di Radon-Nikodym per misure a valori in uno spazio di Banach. Relazione tra misure e misure esterne.

N.B. Tutti i teoremi del programma sono da intendersi con relative dimostrazioni.

Bibliografia e materiale didattico

[1] L.Ambrosio, G.Da Prato, A.Mennucci, Introduction to Measure Theory and Integration, Edizioni della Normale, 2011.
[2] L.Ambrosio, N.Fusco, D.Pallara, Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems, Oxford University Press, New York, 2000.
[3] L.Ambrosio, P.Tilli, Topics on analysis in metric spaces, Oxford University Press, Oxford, 2004.
[4] Y.Benyamini, J.Lindenstrauss, Geometric Nonlinear Functional Analysis, American Mathematical Society, 2000.
[5] Y.D.Burago, V.A.Zalgaller, Geometric inequalities, Grundlehren Math. Springer, Berlin, 1988.
[6] S.B.Chae, Lebesgue integration, Collana "Universitext", Springer 1995.
[7] D.L.Cohn, Measure Theory, Birkhäuser, 1980.
[8] L.C.Evans and R.F.Gariepy, Measure theory and fine properties of functions, revised edition. Textbooks in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 2015.
[9] H.Federer, Geometric measure theory, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.
[10] K.Falconer, Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications, Wiley, 2003.
[11] G.B.Folland, Real Analysis. Modern Techniques and Their Applications, John Wiley and Sons, 1999.
[12] I.P.Natanson, Theory of functions of a real variable, New York, 1964.
[13] H.L.Royden and P.M.Fitzpatrick, Real Analysis, Pearson Education, 2010.

Modalità d'esame

L'esame prevede una prova orale su tutto il programma. La prova richiede la precisa conoscenza dei teoremi del corso assieme alle loro dimostrazioni. Potrà essere richiesta opzionalmente anche la risoluzione di esercizi.

Ultimo aggiornamento 16/06/2022 14:53