UNIVERSITÀ DI PISA

ALGEBRE E GRUPPI DI LIE

GIOVANNI GAIFFI

Anno accademico	2018/19
CdS	MATEMATICA
Codice	089AA
CFU	6

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
ALGEBRE E GRUPPI DI LIE/a	MAT/02	LEZIONI	42	GIOVANNI GAIFFI ENRICO LE DONNE

Obiettivi di apprendimento

Conoscenze

- Al termine del corso studente avrà acquisito le prime conoscenze in merito agli strumenti e alle metodologie per lavorare in algebra e geometria con le algebre e i gruppi di Lie.

Modalità di verifica delle conoscenze
Esame orale.

Capacità
Saper lavorare con le algebre e i gruppi di Lie.

Modalità di verifica delle capacità
Risoluzione, durante l'orale, di esercizi e discussione degli aspetti teorici.

Comportamenti
Partecipare attivamente alle lezioni.

Modalità di verifica dei comportamenti
Nessuna.

Prerequisiti (conoscenze iniziali)
Algebra lineare, come studiata nel corso di Geometria del primo anno. Primi elementi di geometria differenziale.

Corequisiti
Nessuno.

Prerequisiti per studi successivi
Nessuno.

Indicazioni metodologiche
Lezioni frontali, con ausilio di slides.

Programma (contenuti dell'insegnamento)
Introduzione ai gruppi di Lie. Sottogruppi a un parametro. La mappa esponenziale.
Classificazione dei gruppi di Lie abeliani connessi. Definizione di sottogruppo di Lie. Caratterizzazione dei sottogruppi chiusi. Esempi: gruppi di trasformazioni unitarie e ortogonali.

I gruppi simplettici e altri gruppi classici. Esercizi e prime propriet\`a (connessione, caratterizzazione del tangente..).
Rappresentazioni di gruppi topologici compatti. Informazioni sulla misura di Haar. Tori massimali nei gruppi di Lie compatti.
Azione aggiunta di un gruppo compatto sul tangente. Caso dei tori e dei tori massimali. Radici. Esempi $SU(n)$, $SP(n)$, $SO(2n)$, $SO(2n+1)$.
Sistemi di radici, diagrammi di Dynkin e loro classificazione completa. Gruppi di Weyl.
Algebre di Lie. Algebra di Lie associata ad un gruppo di Lie. Le azioni aggiunte Ad e ad. Forme bilineari e invarianza. Formula di Campbell Hausdorff (solo enunciato).
Tutti i tori massimali di un gruppo compatto sono coniugati. Le algebre di Lie di un gruppo compatto sono riduttive. La forma di Killing. Costruzione di un gruppo di Lie compatto avente una data algebra di Lie con forma di Killing definita negativa. Caratterizzazione delle algebre di Lie semisemplici compatte. Rappresentazioni irriducibili di un gruppo topologico e il Lemma di Schur.
Unicit\`a della decomposizione in irriducibili di una rappresentazione di un gruppo. Il trucco unitario: esempio nel caso di $sl(n,C)$. Classificazione delle rappresentazioni irriducibili di $sl(2,C)$.
Sollevamento della struttura di gruppo topologico ad un rivestimento. Caratterizzazione della famiglia di gruppi di Lie che hanno una data algebra di Lie fissata. Calcolo del primo gruppo di omotopia per alcuni gruppi classici complessi.
Algebre risolubili, prime propriet\`a. Il teorema di Lie. Algebre torali massimali e splitting della complessificazione di un'algebra di Lie semisemplice compatta come somma dei suoi spazi peso rispetto alle radici.
Come si ottiene il sistema di radici di un'algebra di Lie semisemplice complessa. Confronti fra metodo geometrico (visto per i gruppi compatti) e algebrico di ottenere un sistema di radici. Corollario: dimostrazione del teorema di classificazione delle algebre di Lie compatte reali. Informazioni sul fatto che questo si estende al teorema di classificazione delle algebre di Lie semisemplici complesse.
Algebre tensoriali e simmetriche. L'algebra inviluppante di un'algebra di Lie, il teorema di Poincar\`e-Birkhoff-Witt e corollari.
Azioni dell'algebra inviluppante. Dimostrazione del teorema di Poincar\`e Birkhoff Witt.
Rappresentazioni di un'algebra di Lie semisemplice complessa. Spazi peso. Moduli standard ciclici e loro caratterizzazione. Teorema: ad ogni elemento nel duale della sottoalgebra torale corrisponde un unico modulo standard ciclico irriducibile.
Teorema di classificazione completa delle rappresentazioni irriducibili complesse di dimensione finita di un'algebra di Lie semisemplice complessa. Esempi: rappresentazioni di $sl(n,C)$ nell'algebra esterna e nell'algebra simmetrica.
Cenni su: decomposizione di Levi, Teorema di Levi-Malcev, Teorema di Ado, rappresentazioni irriducibili di algebre di Lie non semisemplici.

Bibliografia e materiale didattico

Humphreys, Introduction to Lie Algebreas and Representation Theory, Springer.
Knapp, Lie groups beyond an introductio, Birkhauser.
Warner, Foundation of differentiable manifolds and Lie groups, Springer.

Indicazioni per non frequentanti

Nessuna.

Modalità d'esame

Esame orale.

Stage e tirocini

Nessuno.

Pagina web del corso

https://elearning.dm.unipi.it/course/view.php?id=125

Ultimo aggiornamento 21/03/2019 12:15