



# UNIVERSITÀ DI PISA

---

## ALGEBRE E GRUPPI DI LIE

**GIOVANNI GAIFFI**

Anno accademico 2022/23  
CdS MATEMATICA  
Codice 089AA  
CFU 6

Moduli	Settore/i	Tipo	Ore	Docente/i
ALGEBRE E GRUPPI DI LIE/a	MAT/02	LEZIONI	42	GIOVANNI GAIFFI

Obiettivi di apprendimento

### *Conoscenze*

- Al termine del corso studente avrà acquisito le prime conoscenze in merito agli strumenti e alle metodologie per lavorare in algebra e geometria con le algebre e i gruppi di Lie.

### *Modalità di verifica delle conoscenze*

Esame orale.

### *Capacità*

Saper lavorare con le algebre e i gruppi di Lie.

### *Modalità di verifica delle capacità*

Risoluzione, durante l'orale, di esercizi e discussione degli aspetti teorici.

### *Comportamenti*

Partecipare attivamente alle lezioni.

### *Modalità di verifica dei comportamenti*

Nessuna.

### *Prerequisiti (conoscenze iniziali)*

Algebra lineare, come studiata nel corso di Geometria del primo anno. Primi elementi di geometria differenziale.

### *Corequisiti*

Nessuno.

### *Prerequisiti per studi successivi*

Nessuno.

### *Indicazioni metodologiche*

Lezioni frontali, con ausilio di slides.

### *Programma (contenuti dell'insegnamento)*

Introduzione: algebra di Lie associata ad un gruppo di Lie. Le azioni aggiunte  $Ad$  e  $ad$ . Forme bilineari e invarianza. Algebre risolubili, prime proprietà. Il teorema di Lie. Algebre torali massimali e splitting della complessificazione di un'algebra di Lie semisemplice compatta come somma dei suoi spazi peso rispetto alle radici.



## UNIVERSITÀ DI PISA

---

Sistemi di radici, diagrammi di Dynkin e loro classificazione completa. Gruppi di Weyl.

Come si ottiene il sistema di radici di un'algebra di Lie semisemplice complessa. Confronti fra metodo geometrico (visto per i gruppi compatti) e algebrico di ottenere un sistema di radici. Corollario: dimostrazione del teorema di classificazione delle algebre di Lie compatte reali.

Informazioni sul fatto che questo si estende al teorema di classificazione delle algebre di Lie semisemplici complesse.

Algebre tensoriali e simmetriche. L'algebra involuante di un'algebra di Lie, il teorema di Poincaré e Birkhoff-Witt e corollari.

Azioni dell'algebra involuante. Dimostrazione del teorema di Poincaré e Birkhoff Witt.

Rappresentazioni di un'algebra di Lie semisemplice complessa. Spazi peso. Moduli standard ciclici e loro caratterizzazione. Teorema: ad ogni elemento nel duale della sottoalgebra torale corrisponde un unico modulo standard ciclico irriducibile.

Teorema di classificazione completa delle rappresentazioni irriducibili complesse di dimensione finita di un'algebra di Lie semisemplice complessa. Esempi: rappresentazioni di  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$  nell'algebra esterna e nell'algebra simmetrica.

Cenni su: decomposizione di Levi, Teorema di Levi-Malcev, Teorema di Ado, rappresentazioni irriducibili di algebre di Lie non semisemplici.

### Bibliografia e materiale didattico

Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer.

Knapp, Lie groups beyond an introduction, Birkhauser.

Warner, Foundation of differentiable manifolds and Lie groups, Springer.

### Indicazioni per non frequentanti

Nessuna.

### Modalità d'esame

Esame orale.

### Stage e tirocini

Nessuno.

*Ultimo aggiornamento 03/08/2022 08:16*